

# Analiza niepewności lokalizacji odometrycznej z wykorzystaniem systemu przechwytywania ruchu i symulacji Monte Carlo

Sebastian Dudzik, Piotr Szląg

Politechnika Częstochowska, Wydział Elektryczny, Al. Armii Krajowej 17, 42-200 Częstochowa

**Streszczenie:** W ostatnich latach obserwuje się bardzo dynamiczny rozwój technologii związanych z robotami mobilnymi, zwłaszcza robotami autonomicznymi. Jedną z podstawowych kompetencji robotów mobilnych jest nawigacja i związana z nią lokalizacja. W artykule przedstawiono wyniki badań mających na celu oszacowanie niepewności lokalizacji z wykorzystaniem modelu kinematyki napędu różnicowego. Wykonano badania eksperymentalne i symulacyjne robota mobilnego QBot 2e. W ramach badań eksperymentalnych przeprowadzono symulacje sprzętowe ruchu robota wzdłuż zadanych tras z jednoczesnym pomiarem prędkości. Wyniki pomiarów posłużyły do przeprowadzania symulacji Monte Carlo mającej na celu oszacowanie niepewności wyznaczania położenia robota. Na podstawie wyników badań stwierdzono, że niepewność lokalizacji rośnie wraz z czasem a gęstości prawdopodobieństwa zmiennych losowych reprezentujących położenie robota, mogą być z dużą dokładnością aproksymowane rozkładem normalnym.

**Słowa kluczowe:** lokalizacja robota mobilnego, metoda Monte Carlo, model kinematyki

## 1. Wprowadzenie

### 1.1. Autonomiczne roboty mobilne

Robotyka mobilna jest dziedziną, która rozwija się bardzo dynamicznie. Dzięki zastosowaniu złożonych systemów nawigacji i lokalizacji wspomaganych zaawansowanymi technologiami pozyskiwania informacji z otoczenia, roboty mobilne mogą wykonywać coraz bardziej złożone zadania.

Na proces autonomicznego poruszania się robota składa się kilka czynników wzajemnie przenikających się. Podstawą jest sposób postrzegania otoczenia przez robota. Realizowany jest za pomocą czujników. Często stosowane są równocześnie różne rodzaje sensorów, przez co robot może dokładniej określić swoje położenie. Najczęściej stosowane są różnego rodzaju kamery (RGB, RGBD), lidary, czujniki ultradźwiękowe, GPS, żyroskopy, akcelerometry, enkodery i inne. Pozyskiwane dane zasilają algorytmy lokalizacji. Lokalizacja jest fundamentalnym elementem, umożliwiającym nawigację. Lokalizacja polega na ustaleniu pozy robota względem układu odniesienia, bazując

na dostępnych czujnikach i innych istotnych, dostępnych informacjach umożliwiających oszacowanie pozy [1–5].

Lokalizację można określić również jako wyznaczenie położenia robota w środowisku na podstawie znanej wcześniej mapy. Problem ten sprowadza się do określenia pozy robota, na którą składają się współrzędne oraz orientacja. Istnieje wiele sposobów lokalizacji, uzależnionych od dostępnego zestawu czujników czy warunków środowiskowych, w których znajduje się autonomiczny robot mobilny. Lokalizację robota autonomicznego można określić jako stan przekonania o tym, że znajduje się w określonym miejscu w konkretnej chwili czasu na podstawie znanej mapy [6].

Współczesne systemy przechwytywania ruchu (ang. *motion capture*) znajdują szerokie zastosowanie w przemyśle rozrywkowym, medycynie, sporcie i robotyce. Wykorzystują zaawansowane technologie, jak kamery optyczne, systemy inercyjne (IMU) oraz techniki hybrydowe, które integrują różne źródła danych w celu uzyskania precyzyjnych informacji o ruchu. Optyczne systemy *motion capture*, zapewniają najwyższą dokładność dzięki zastosowaniu markerów refleksyjnych i kamer o wysokiej rozdzielczości, ale są kosztowne i wymagają specjalistycznych warunków pracy [7]. Z kolei systemy inercyjne oferują mobilność i łatwość użycia w środowiskach dynamicznych (tj. położenie obiektów jest zmienne, zmieniają się warunki oświetleniowe). Nie mniej jednak należy zwrócić uwagę na fakt akumulacji błędów związanych z niepewnością czujników [8]. Szczególnie istotne, w przypadku robotyki mobilnej, wydają się rozwiązania hybrydowe, które łączą technologie optyczne i inercyjne [9]. W niniejszej pracy zastosowano system przechwytywania ruchu OptiTrack i oprogramowanie Motive.

#### Autor korespondujący:

Sebastian Dudzik, sebastian.dudzik@pocz.pcz

#### Artykuł recenzowany

nadesłany 30.10.2024 r., przyjęty do druku 20.02.2025 r.



Zezwala się na korzystanie z artykułu na warunkach licencji Creative Commons Uznanie autorstwa 4.0 Int.

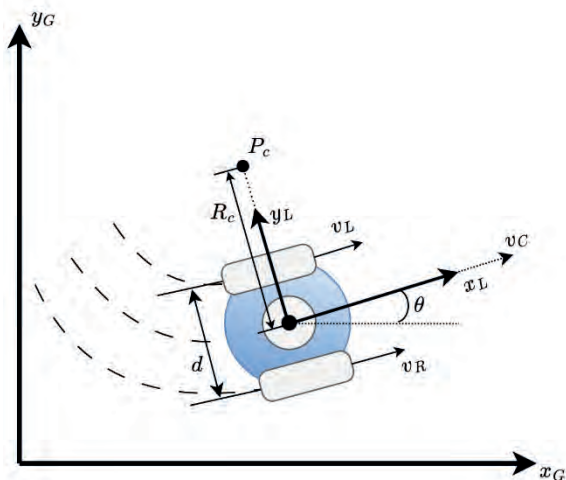
Niepewność wyznaczania lokalizacji robota mobilnego za pomocą odometrii jest określana na podstawie analizy błędów systematycznych i losowych. W celu oszacowania błędów systematycznych, takich jak różnice średnic kół lub błędy enkoderów, przeprowadza się kalibrację eksperymentalną na trasach testowych. W trakcie kalibracji porównywane są rzeczywiste przemieszczenia z wynikami pomiarów odometrycznych. Dodatkowo oblicza się odpowiednie poprawki korekcyjne [10, 11].

Do oceny błędów losowych występujących w pomiarach odometrycznych zazwyczaj stosuje się metody statystyczne. Najczęściej polegają one na estymacji odchylenia standardowego przemieszczenia w różnych kierunkach (przód-tył i obrót). Stosowane są też bardziej zaawansowane podejścia, takie jak analiza kowariancji odometrii. Są to kluczowe narzędzia stosowane w algorytmach probabilistycznych, takich jak np. filtr Kalmana [12, 13]. Należy podkreślić, że analiza niepewności jest często prowadzona w zmiennych warunkach środowiskowych, w tym na nierównym podłożu lub przy zmiennym tarciu [14].

W niniejszym artykule zastosowano odmienne podejście. Do określenia niepewności lokalizacji zastosowano metodę propagacji rozkładów i symulację Monte Carlo. Analizę niepewności lokalizacji przeprowadzono zgodnie z zaleceniami BIPM [25, 26], przy czym w celu redukcji błędów systematycznych wykonano kalibrację za pomocą systemu przechwytywania ruchu OptiTrack.

## 1.2. Lokalizacja robota mobilnego za pomocą modelu kinematyki napędu różnicowego

Podstawowym wyzwaniem współczesnej robotyki, w szczególności w przypadku mobilnych robotów autonomicznych, jest projektowanie algorytmów sterowania i ich implementacja w postaci oprogramowania sterującego współpracującego z wybraną architekturą sprzętową [4, 15]. W tym celu, w pierwszej kolejności niezbędne jest uzyskanie spójnego opisu ruchu robota w przestrzeni roboczej. Opis ten stanowią równania kinematyki prostej i odwrotnej oparte na parametrach geometrycznych, bezpośrednio związanych z konstrukcją robota. W przypadku robotów mobilnych, model kinematyki nakłada ograniczenia (więzy), które wpływają na możliwe trajektorie. Istnieje wiele modeli kinematyki robotów mobilnych, w tym modele dla pojazdów czterokołowych i trójkołowych, a także dwukołowego napędu różnicowego [16]. W odniesieniu do równań kinematycznych wyróżniamy modele kinematyki prostej pozwalające na lokalizację robota oraz modele kinematyki odwrotnej stosowane do sterowania. W pracy zaprezentowano wyniki badań niepewności metody lokalizacji dwukołowego robota mobilnego Quanser QBot 2e (rys. 1) z wykorzystaniem



Rys. 1. Uproszczony schemat kinematyczny robota QBot 2e  
Fig. 1. Simplified kinematic diagram of the QBot 2e robot

modelu kinematyki. Z tego powodu dalej opisano model kinematyki prostej napędu różnicowego.

Na rys. 1 przyjęto następujące oznaczenia:  $d$  [m] – odległość między kołami platformy jezdnej;  $v_L, v_R$  [m/s] – prędkości liniowe odpowiednio lewego i prawego koła;  $v_C$  [m/s] – prędkość liniowa platformy jezdnej (robota);  $Ox_Gy_G$  – globalny układ odniesienia;  $Ox_Ly_L$  – lokalny układ odniesienia związany z robotem;  $\theta$  [rad] – kąt między globalnym a lokalnym układem odniesienia;  $P_c$  – chwilowy środek krzywizny toru jazdy robota;  $R_c$  – chwilowy promień krzywizny toru jazdy robota.

Na podstawie modelu kinematyki prostej możliwe jest wyznaczenie prędkości liniowej  $v_C$  i kątowej  $\omega_C = \dot{\theta}$  platformy dla zadanych prędkości liniowych  $v_L$  i  $v_R$ , odpowiednio lewego i prawego koła z wykorzystaniem zależności:

$$\begin{cases} v_C = \frac{v_R + v_L}{2} \\ \omega_C = \frac{v_R - v_L}{d} \end{cases} \quad (1)$$

Równania (1) obowiązują przy założeniu wykorzystania lokalnego układu odniesienia związanego z robotem. W praktyce dla celów nawigacji i mapowania, niezbędne jest określenie położenia i prędkości robota w odniesieniu do globalnego układu odniesienia  $Ox_Gy_G$ . W tym celu wprowadza się macierz rotacji o postaci:

$$R = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Niech wektor stanu ma postać:

$$S = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Zmianę stanu  $S$  względem globalnego układu odniesienia można opisać jako:

$$\dot{S} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} v_C \\ 0 \\ \omega_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(v_R + v_L) \cos \theta \\ \frac{1}{2}(v_R + v_L) \sin \theta \\ \frac{1}{d}(v_R - v_L) \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Równanie (4) stanowi model kinematyki prostej napędu różnicowego [4].

Jedną z podstawowych metod lokalizacji robotów mobilnych jest metoda odometryczna [19]. Polega ona na wykorzystaniu pomiarów z enkoderów i żyroskopu w celu określenia położenia robota [4, 16, 17]. Procedura lokalizacji przebiega w następujących krokach:

1. Estymacja prędkości liniowej kół  $v_R(x), v_L(x)$  z wykorzystaniem enkoderów i/lub żyroskopu.

2. Zastosowanie równania kinematyki (4) w celu estymacji prędkości liniowej  $v_c$  i kątowej  $\omega_c$  platformy jezdnej.
3. Estymacja bieżącej pozycji robota  $\xi(t) = [x(t), y(t), \theta(t)]^T$  przez całkowanie w czasie równania (4) od pozycji początkowej  $\xi_0(t) = [x(0), y(0), \theta(0)]^T$  zgodnie z zależnością:

$$\xi(t) = S(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} = \int_0^t \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(v_R(t) + v_L(t)) \cos \theta(t) \\ \frac{1}{2}(v_R(t) + v_L(t)) \sin \theta(t) \\ \frac{1}{d}(v_R(t) - v_L(t)) \end{bmatrix} dt. \quad (5)$$

W wyniku zastosowania opisanej procedury uzyskuje się estymatę bieżącej pozycji w globalnym układzie odniesienia. W celu oszacowania niepewności lokalizacji przyjęto opisany dalej model lokalizacji oparty na dyskretyzacji równania (5), sprowadzający się do sumowania kolejnych przemieszczeń wzdłuż trajektorii przebytej przez robota [4, 18, 19]. Zakładając że poza jest uaktualniana w dyskretnych chwilach czasu z okresem próbkowania  $\Delta t$ , przemieszczenia i zmiana orientacji w czasie  $\Delta t$  mogą być określone jako następujące przyrosty:

$$\begin{aligned} \Delta x &= \frac{\Delta s_r + \Delta s_l}{2} \cos \left( \theta + \frac{\Delta \theta}{2} \right), \\ \Delta y &= \frac{\Delta s_r + \Delta s_l}{2} \sin \left( \theta + \frac{\Delta \theta}{2} \right), \\ \Delta \theta &= \frac{\Delta s_r - \Delta s_l}{d}, \end{aligned} \quad (6)$$

gdzie  $\Delta s_r$ ,  $\Delta s_l$  to odpowiednio odległość pokonana przez prawe i lewe koło w czasie  $\Delta t$ .

Stąd estymator pozycji  $\bar{\xi}(t + \Delta t)$  w chwili  $t + \Delta t$  może być wyznaczony za pomocą równania [18, 19]:

$$\bar{\xi}(t + \Delta t) = \bar{\xi}(t) + \begin{bmatrix} \frac{\Delta s_r + \Delta s_l}{2} \cos \left( \theta + \frac{\Delta s_r - \Delta s_l}{2d} \right) \\ \frac{\Delta s_r + \Delta s_l}{2} \sin \left( \theta + \frac{\Delta s_r - \Delta s_l}{2d} \right) \\ \frac{\Delta s_r - \Delta s_l}{d} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Ostatecznie zależność (7), stanowiąca podstawowe równanie aktualizacji pozycji stosowane w metodzie odometrii, umożliwia wyznaczenie pozycji robota w każdej dyskretnej chwili czasowej, a co za tym idzie pozwala na jego lokalizację w przestrzeni roboczej. Jednym z celów badań prezentowanych w pracy było określenie niepewności lokalizacji z wykorzystaniem estymatora (7). Do oszacowania niepewności estymatora zastosowano metodę propagacji rozkładów i symulację Monte Carlo opisaną w dalszej części artykułu [25, 26].

## 2. Metodyka badań

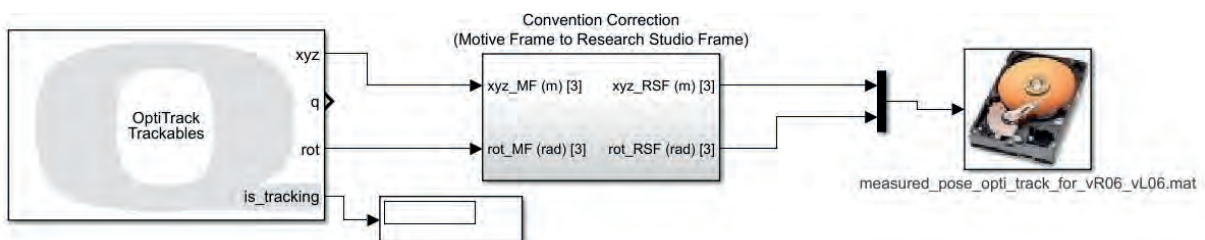
### 2.1. Badania eksperymentalne

Celem pracy było oszacowanie niepewności lokalizacji z wykorzystaniem modelu kinematyki prostej napędu różnicowego robota mobilnego. Aby określić niepewność wyznaczania położenia robota zastosowano metodę propagacji rozkładów i symulację Monte Carlo. Jako wielkości wejściowe modelu przyjęto prędkości liniowe prawego i lewego koła, zgodnie z równaniem (4). Z uwagi na konieczność oszacowania niepewności standardowej pomiaru tych wielkości, niezbędne było przeprowadzenie eksperymentów z użyciem rzeczywistego robota poruszającego się po zadanych z góry trajektoriach, a w szczególności rejestracja wartości prędkości liniowych kół i aktualnej pozycji robota.

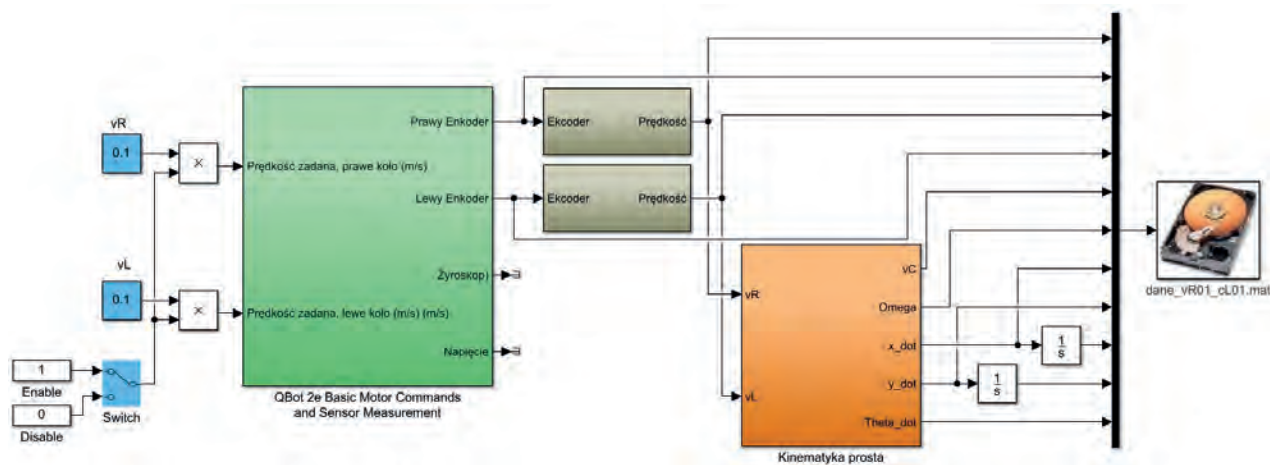
Badania zostały przeprowadzone w Laboratorium Inteligentnych Robotów Mobilnych, które wchodzi w skład struktury Wydziału Elektrycznego Politechniki Częstochowskiej [20]. Eksperymentom poddano mobilny robot kołowy QBot 2e, w którym zastosowano napęd różnicowy opisany modelem (4). Robot poruszał się w zabezpieczonej przestrzeni, która monitorowana jest za pomocą ośmiu kamer przez optyczny system przechwytywania ruchu OptiTrack, nadzorowany przez aplikację Motive 2.0 [21, 22]. Zastosowanie systemu OptiTrack pozwoliło na ciągle pozyskiwanie danych o lokalizacji robota, którą następnie porównywano z lokalizacją wyznaczoną na podstawie pomiarów odometrycznych [23]. Sterowanie ruchem robota oraz pozyskiwanie danych pomiarowych z czujników robota realizowano za pomocą aplikacji stworzonej w środowisku obliczeniowym MATLAB/Simulink 2019b. Aplikacje te wchodziły w skład naziemnej stacji kontroli. Całość zastosowanego w badaniach sprzętu i oprogramowania jest elementem profesjonalnego rozwiązania Autonomous Vehicles Research Studio [24].

Wykorzystując aplikację Motive 2.0 utworzono wirtualny model ciała sztywnego. Zastosowano w tym celu specjalne markery zamontowane na robocie mobilnym. Dzięki zamodelowaniu ciała sztywnego możliwe było śledzenie ruchu robota z niepewnością 0,5 mm.

Aplikacja Motive 2.0 pozwala na przekazywanie w czasie rzeczywistym danych o pozycji ciała sztywnego do środowiska MATLAB/Simulink. Wartości te mogą być następnie wykorzystane do wyznaczenia rzeczywistej trajektorii robota. W badaniach opisywanych w pracy niezbędne było wyznaczenie bieżącej pozycji z użyciem systemu OptiTrack. W tym celu zasto-



Rys. 2. Diagramu programu Simulink do lokalizacji robota z wykorzystaniem oprogramowania Motive i systemu OptiTrack  
Fig. 2. Simulink diagram used for robot localization using the Motive software and the OptiTrack system



Rys. 3. Diagramu programu do sterowania ruchem robota i lokalizacji z wykorzystaniem czujników i modelu kinematyki prostej  
 Fig. 3. Simulink diagram used for robot motion control and localization using sensors and a simple kinematics model

sowano schemat symulacyjny aplikacji stworzonej w środowisku MATLAB/Simulink przedstawiony na rys. 2.

Oprócz pozyskiwania danych o lokalizacji niezbędna była również kontrola ruchu robota, tak aby poruszał się po zadanej trajektorii. W tym celu, w programie Simulink, stworzono aplikację, której zadaniem było sterowanie robotem dla zadanych parametrów ruchu, tj. prędkości liniowej prawego i lewego koła. Jednocześnie rejestrowano w czasie rzeczywistym dane z enkoderów i żyroskopu. Poza rejestracją danych, w aplikacji przeliczono wartości z enkoderów na prędkości liniowe kół. Ostateczne wartości prędkości i odczyty z żyroskopu stanowiły dane wejściowe dla modelu kinematyki prostej opisanej zależnością (4). Położenie robota uzyskano przez całkowanie prędkości liniowych zgodnie z zależnością (5). Na rys. 3 przedstawiono schemat diagramu opisanej aplikacji.

Badania eksperymentalne przeprowadzono w następujących etapach:

1. Kalibracja systemu OptiTrack.
2. Ustalenie zadanych trajektorii.
3. Symulacja sprzętowa (ang. *hardware-in-the-loop*) ruchu robota dla zadanych trajektorii w przestrzeni roboczej.
4. Zapis danych z systemu OptiTrack i czujników robota.

Podstawowym warunkiem prawidłowego przeprowadzenia pomiarów z wykorzystaniem systemu OptiTrack jest wykonanie ściśle określonych czynności kalibracyjnych. W związku z tym każdorazowo, przed przystąpieniem do badań przeprowadzana była kalibracja systemu mająca na celu uzyskanie jak najwyższej dokładności określania położenia robota w przestrzeni roboczej. Przygotowane wcześniej schematy posłużyły do zaprogramowania trajektorii. W trakcie badań zbiór możliwych trajektorii został ograniczony do poruszania się robota po linii prostej (w przypadku jednakowych zadanych prędkości liniowych) lub po okręgu o różnym promieniu, zależnym od różnicy między zadanymi wartościami prędkości. W ramach eksperymentów

Tab. 1. Zadane wartości prędkości liniowych prawego i lewego koła oraz całkowite czasy przejazdu dla poszczególnych tras

Tab. 1. Set values of linear speeds of the right and left wheels and values of travel times for individual path

	Trasa 1	Trasa 2	Trasa 3
$v_R$ [m/s]	0,3	0,3	0,2
$v_L$ [m/s]	0,2	0,6	0,2
$t_{tot}$ [s]	13,00	5,00	14,00

wykonano serię przejazdów o różnych wartościach zadanych prędkości kół. Wartości prędkości liniowych dla każdej z tras zestawiono w tabeli 1. Dodatkowo przedstawiono całkowite czasy przejazdów każdą z tras.

Kolejnym etapem była symulacja sprzętowa ruchu robota dla ustalonych z góry trajektorii. W trakcie symulacji pozyskiwano dane pomiarowe z systemu OptiTrack z wykorzystaniem schematu przedstawionego na rys. 2 oraz dane niezbędne do lokalizacji robota przy użyciu diagramu z rys. 3. Ostatecznie w ramach symulacji zostały zgromadzone dane pomiarowe z rzeczywistych przejazdów robota kołowego. Dane pozyskiwano z dwóch źródeł, tj. systemu OptiTrack oraz czujników robota.

W przypadku danych pochodzących z systemu OptiTrack, pomiary rejestrowane były z okresem próbkowania równym 0,001 s, natomiast dla pomiarów z czujników przyjęto okres próbkowania równy 0,01 s. W celu synchronizacji pomiarów ustalono jeden okres próbkowania wynoszący 0,01 s, wybierając co dziesiątą próbkę z systemu OptiTrack.

## 2.2. Badania symulacyjne

Badania symulacyjne przeprowadzono w następujących krokach:

1. Wykonanie symulacji Monte Carlo w celu wyznaczenia rozkładów zmiennych losowych reprezentujących wielkości wejściowe modelu (4), tj. prędkości liniowych prawego i lewego koła.
2. Symulacja numeryczna ruchu robota dla zadanych trajektorii – równanie (7).
3. Kalibracja wyników symulacji z wykorzystaniem systemu OptiTrack, w celu skorygowania oddziaływań systematycznych.
4. Wyznaczenie rozkładów prawdopodobieństwa położenia robota dla każdej chwili czasowej z wykorzystaniem modelu (4) i metody propagacji rozkładów.
5. Oszacowanie parametrów wynikowego rozkładu prawdopodobieństwa – wartości oczekiwanej i złożonej niepewności standardowej.

W celu wygenerowania rozkładów zmiennych losowych reprezentujących wielkości wejściowe modelu (4) niezbędne było wyznaczenie wartości oczekiwanej i odchylenia standardowego prędkości liniowej prawego i lewego koła zarejestrowanych podczas przejazdu robota, w trakcie badań eksperymentalnych. W dalszej kolejności wyznaczono parametry rozkładu jednostajnego odpowiadające wartościom odchylenia standardowego i wartości oczekiwanej wyznaczonych dla prędkości liniowych prawego i lewego koła zgodnie z zależnością:

$$\begin{cases} a = \mu_V - \sqrt{3}\sigma_V \\ b = \mu_V + \sqrt{3}\sigma_V \end{cases}, \quad (8)$$

gdzie:  $a$ ,  $b$  – parametry rozkładu jednostajnego natomiast  $\mu_V$  i  $\sigma_V$  stanowią odpowiednio wartość oczekiwaną i odchylenie standardowe prędkości liniowej, opisane następującymi wzorami:

$$\begin{aligned} \mu_V &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i(t) \\ \sigma_V &= \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (v_i(t) - \mu_V)^2} \end{aligned}, \quad (9)$$

gdzie:  $v_i(t)$  [m/s] – wartość prędkości liniowej koła w  $i$ -tej chwili,  $N$  – całkowita liczba zmierzonych wartości prędkości liniowej koła.

Na podstawie parametrów obliczonych z równań (8, 9) wygenerowano po 10 000 próbek wartości reprezentujących zmienne losowe o rozkładzie jednostajnym, reprezentujące prędkości linowe prawego i lewego koła. W kolejnym kroku przeprowadzono symulację ruchu robota na podstawie zależności (5–7). W trakcie symulacji obliczono wartości prędkości liniowej i obrotowej platformy jezdnej robota. Celem symulacji było wyznaczenie zestawu wyjściowych zmiennych losowych modelu kinematyki (4), reprezentujących współrzędne  $x$  i  $y$  położenia oraz orientację robota. Należy podkreślić, że w badaniach symulacyjnych zastosowano uproszczony model kinematyki bazujący jedynie na prędkościach liniowych prawego i lewego koła. W takim modelu bieżąca orientacja robota jest wyznaczana jedynie na podstawie

tych prędkości. Jeżeli do wyznaczania orientacji robota zostaną użyte czujniki inercyjne, takie jak żyroskop, niezbędne będzie uzupełnienie budżetu niepewności o niepewność standardową związaną z pomiarem żyroskopowym.

Dane lokalizacyjne z systemu OptiTrack umożliwiły kalibrację niezbędną do skorygowania wpływu oddziaływań systematycznych. Kalibrację przeprowadzono w następujących krokach:

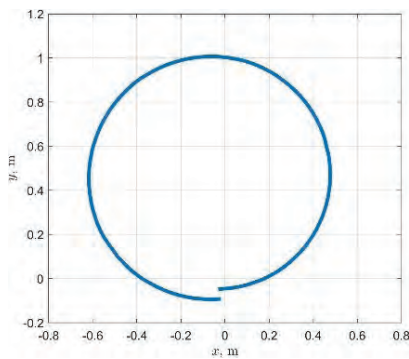
1. Odczyt współrzędnych ( $x_0$ ,  $y_0$ ) punktu startowego z systemu OptiTrack dla każdej z tras.
2. Korekta współrzędnych punktów każdej z tras wygenerowanych na podstawie zależności (7) z uwzględnieniem przesunięcia wprowadzanego przez współrzędne ( $x_0$ ,  $y_0$ ).

Ostatnim etapem badań symulacyjnych było wyznaczenie parametrów wynikowego rozkładu prawdopodobieństwa, tj. wartości oczekiwanej i odchylenia standardowego. W tym celu przeprowadzono aproksymację rozkładów zmiennych losowych reprezentujących współrzędne  $x$  i  $y$  położenia, aproksymacji uzyskanych w trakcie symulacji modelu kinematyki. Do aproksymacji zastosowano rozkład normalny.

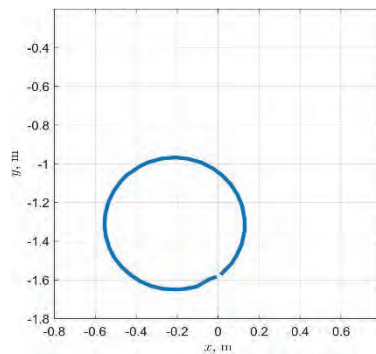
## 3. Wyniki badań

### 3.1. Wyniki badań eksperymentalnych

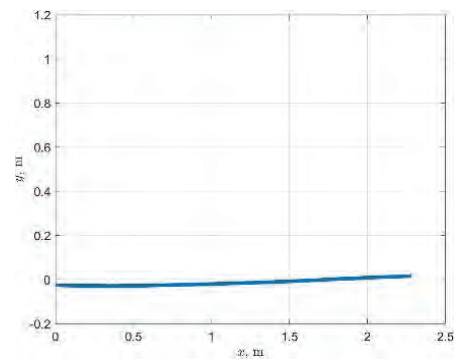
Wyniki badań eksperymentalnych przedstawiono na rys. 4–9. Na rys. 4–6 zaprezentowano przebiegi trajektorii robota zarejestrowane przez system OptiTrack, odpowiednio dla tras 1, 2 i 3. Dodatkowo na rys. 7–9 przedstawiono przebiegi czasowe wartości prędkości liniowych prawego i lewego koła robota w trakcie pokonywania tras 1, 2 i 3. Na wykresach 7–9 są przebiegi prędkości zarejestrowane w stanie ustalonym, tj. po zakończeniu procesu przyspieszania.



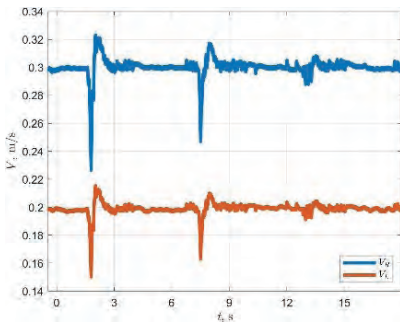
Rys. 4. Przebieg trasy 1 robota zarejestrowany przez system OptiTrack  
Fig. 4. Path No. 1 recorded by the OptiTrack system



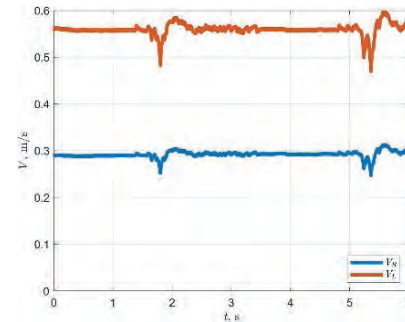
Rys. 5. Przebieg trasy 2 robota zarejestrowany przez system OptiTrack  
Fig. 5. Path No. 2 recorded by the OptiTrack system



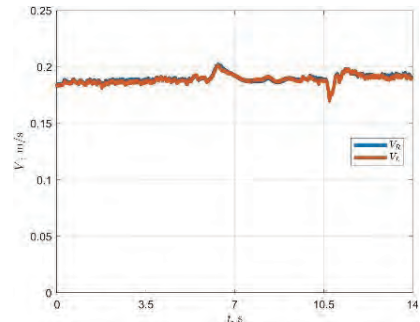
Rys. 6. Przebieg trasy 3 robota zarejestrowany przez system OptiTrack  
Fig. 6. Path No. 3 recorded by the OptiTrack system



Rys. 7. Przebiegi prędkości liniowych prawego i lewego koła robota dla trasy 1  
Fig. 7. Linear velocity curves of the right and left robot wheel for path No. 1



Rys. 8. Przebiegi prędkości liniowych prawego i lewego koła robota dla trasy 2  
Fig. 8. Linear velocity curves of the right and left robot wheel for path No. 2



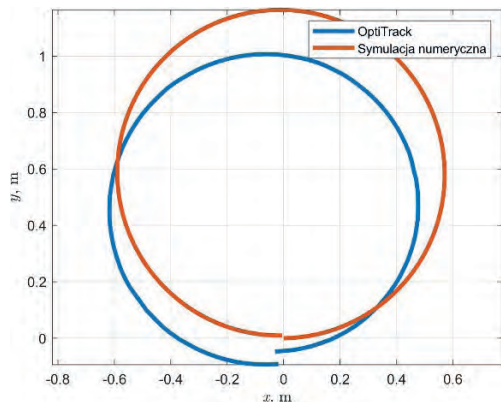
Rys. 9. Przebiegi prędkości liniowych prawego i lewego koła robota dla trasy 3  
Fig. 9. Linear velocity curves of the right and left robot wheel for path No. 3

### 3.2. Wyniki badań symulacyjnych

W dalszej części pracy przedstawiono wyniki badań symulacyjnych. Przykładowe wyniki kalibracji uzyskane dla trasy 1 zaprezentowano na rys. 10 (trajektoria przed kalibracją) oraz 11 (trajektoria po kalibracji). Dodatkowo wartości położenia robota pozyskiwane z systemu OptiTrack w trakcie pokonywania

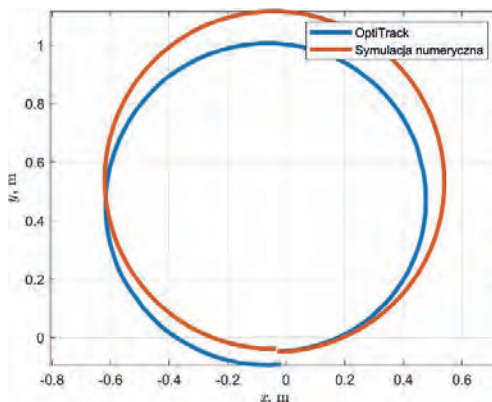
każdej z tras, oznaczone jako  $POS_R$ , zestawiono w tab. 2–4.

Jak widać z rys. 10 i 11, położenie początkowe robota przed kalibracją różni się od położenia wskazywanego przez system OptiTrack. Dzięki kalibracji wartość położenia początkowego ustalono jako równą położeniu odczytanemu z systemu OptiTrack. Dodatkowo z rysunków widać znaczące różnice



Rys. 10. Przebieg trasy 1 robota przed przeprowadzeniem kalibracji

Fig. 10. Path no. 1 before calibration



Rys. 11. Przebieg trasy 1 robota po wykonaniu kalibracji

Fig. 11. Path no. 1 after calibration

Tab. 2. Parametry rozkładu prawdopodobieństwa zmiennych losowych wyjściowych oraz położenie wyznaczone przez system OptiTrack w wybranych chwilach (Trasa 1)

Tab. 2. The parameters of the probability distribution of output random variables and position measured by OptiTrack at selected time instants (Path No. 1)

$t$ [s]	0,2		5,0		9,5		14	
	$x$	$y$	$x$	$y$	$x$	$y$	$x$	$y$
$\sigma$ [mm]	$17 \cdot 10^{-2}$	$10 \cdot 10^{-3}$	$54 \cdot 10^{-2}$	$68 \cdot 10^{-2}$	$90 \cdot 10^{-2}$	$81 \cdot 10^{-2}$	1,0	1,0
$\mu$ [m]	$17 \cdot 10^{-3}$	$-45 \cdot 10^{-3}$	$44 \cdot 10^{-2}$	$85 \cdot 10^{-2}$	$-51 \cdot 10^{-2}$	$86 \cdot 10^{-2}$	$-18 \cdot 10^{-2}$	$-31 \cdot 10^{-3}$
$POS_R$ [m]	$19 \cdot 10^{-3}$	$-44 \cdot 10^{-3}$	$40 \cdot 10^{-2}$	$75 \cdot 10^{-2}$	$-45 \cdot 10^{-2}$	$85 \cdot 10^{-2}$	$-13 \cdot 10^{-2}$	$-9 \cdot 10^{-3}$

Tab. 3. Parametry rozkładu prawdopodobieństwa zmiennych losowych wyjściowych oraz położenie wyznaczone przez system OptiTrack w wybranych chwilach (Trasa 2)

Tab. 3. The parameters of the probability distribution of output random variables and position measured by OptiTrack at selected time instants (Path No. 2)

$t$ [s]	0,2		2,0		3,5		5	
	X	y	X	Y	x	y	X	y
$\sigma$ [mm]	$15 \cdot 10^{-2}$	$12 \cdot 10^{-2}$	$51 \cdot 10^{-2}$	$41 \cdot 10^{-2}$	$66 \cdot 10^{-2}$	$55 \cdot 10^{-2}$	$73 \cdot 10^{-2}$	$72 \cdot 10^{-2}$
$\mu$ [m]	$-68 \cdot 10^{-3}$	-1,63	$-61 \cdot 10^{-2}$	-1,33	$-19 \cdot 10^{-2}$	$-98 \cdot 10^{-2}$	$67 \cdot 10^{-3}$	-1,47
$POS_R$ [m]	$-70 \cdot 10^{-3}$	-1,58	$55 \cdot 10^{-2}$	-1,37	$-21 \cdot 10^{-2}$	$-97 \cdot 10^{-2}$	$115 \cdot 10^{-3}$	-1,41

Tab. 4. Parametry rozkładu prawdopodobieństwa zmiennych losowych wyjściowych oraz położenie wyznaczone przez system OptiTrack w wybranych chwilach (Trasa 3)

Tab. 4. The parameters of the probability distribution of output random variables and position measured by OptiTrack at selected time instants (Path No. 3)

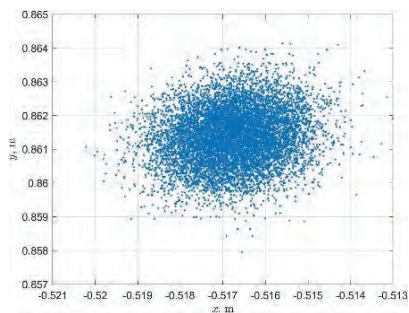
$t$ [s]	0,2		5,0		9,5		11	
	x	y	X	y	x	y	x	y
$\sigma$ [mm]	$12 \cdot 10^{-2}$	0,0	$58 \cdot 10^{-2}$	$6 \cdot 10^{-3}$	$81 \cdot 10^{-2}$	$14 \cdot 10^{-3}$	$87 \cdot 10^{-2}$	$17 \cdot 10^{-3}$
$\mu$ [m]	$12 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-2}$	$92 \cdot 10^{-2}$	$15 \cdot 10^{-3}$	1,77	$3 \cdot 10^{-3}$	2,06	$12 \cdot 10^{-3}$
$POS_R$ [m]	$17 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-3}$	$94 \cdot 10^{-2}$	$20 \cdot 10^{-3}$	1,82	$4 \cdot 10^{-3}$	2,13	$13 \cdot 10^{-3}$

w przebiegach zadanych trajektorii odczytanych z systemu OptiTrack i wyznaczonych za pomocǳ równania (7).

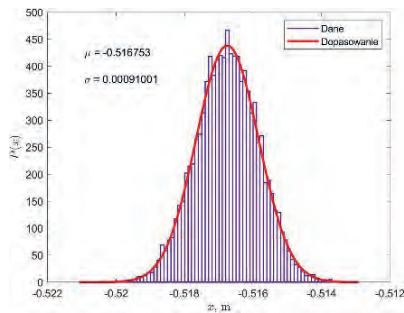
Estymowane parametry wartości oczekiwanej  $\mu$  i odchylenia standardowego  $\sigma$  rozkładu zmiennych losowych wyjściowych, reprezentujǳcych współrzedne  $x$  i  $y$  robota w wybranych chwilach oraz położenie wyznaczone z wykorzystaniem systemu OptiTrack przedstawiono w tabelach 2–4. Na wykresach 12–20 zaprezentowano też odpowiednio: rozrzuty wartości położenia robota (rys. 12, 15, 18) oraz dopasowanie funkcji gęstości prawdopodobieństwa do

rozkładu położenia robota wzdłuz osi  $x$  (rys. 13, 15, 19) i  $y$  (rys. 14, 17, 20) dla tras 1, 2, 3 w wybranych chwilach czasowych.

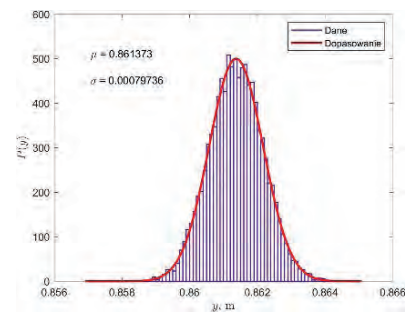
Analizujǳc wyniki zebrane w tab. 2–4, oraz przedstawione na rys. 12–20, stwierdzono, że występujǳ różnice między wartościami oczekiwanymi  $POS_R$  odczytanymi z systemu OptiTrack a wartościami uzyskanymi z równania (7). Dodatkowo zaobserwowano, że wartoc odchyłeń standardowych rozkładow zmiennych losowych reprezentujǳcych współrzedne  $x$  i  $y$  rośnie wraz z czasem.



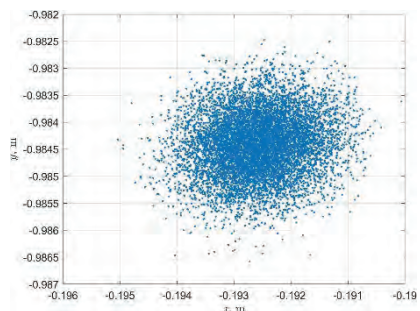
**Rys. 12. Rozrzut wartoci połozenia robota w chwili  $t = 9,5$  s dla trasy 1**  
Fig. 12. The dispersion of the robot position values at time  $t = 9.5$  s for Path No. 1



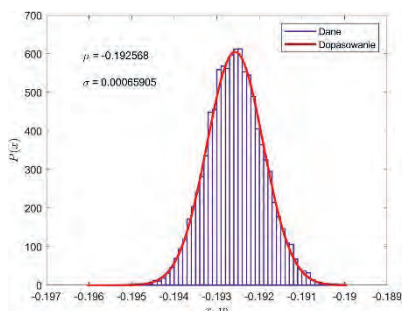
**Rys. 13. Dopasowanie funkcji gęstoci prawdopodobiestwa rozkładu połozenia robota wzdłuz osi  $x$ , w chwili  $t = 9,5$  s dla trasy 1**  
Fig. 13. Fitting the probability density function of the robot position distribution along the  $x$ -axis at time  $t = 9.5$  s for Path No. 1



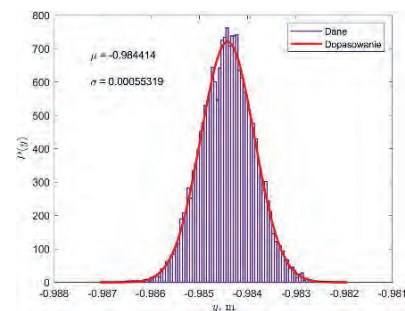
**Rys. 14. Dopasowanie funkcji gęstoci prawdopodobiestwa rozkładu połozenia robota wzdłuz osi  $y$ , w chwili  $t = 9,5$  s dla trasy 1**  
Fig. 14. Fitting the probability density function of the robot position distribution along the  $y$ -axis at time  $t = 9.5$  s for Path No. 1



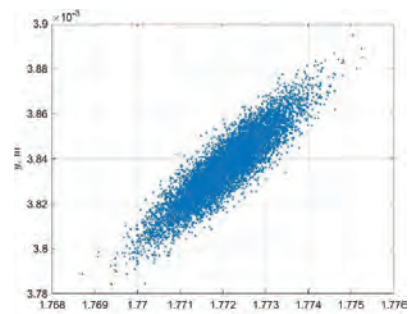
**Rys. 15. Rozrzut wartoci połozenia robota w chwili czasowej  $t = 3,5$  s dla trasy 2**  
Fig. 15. The dispersion of the robot position values at time  $t = 3.5$  s for Path No. 2



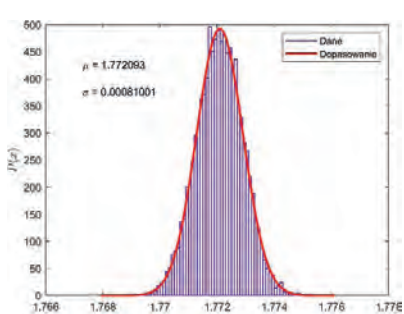
**Rys. 16. Dopasowanie funkcji gęstoci prawdopodobiestwa rozkładu połozenia robota wzdłuz osi  $x$ , w chwili  $t = 3,5$  s dla trasy 2**  
Fig. 16. Fitting the probability density function of the robot position distribution along the  $x$ -axis at time  $t = 3.5$  s for Path No. 2



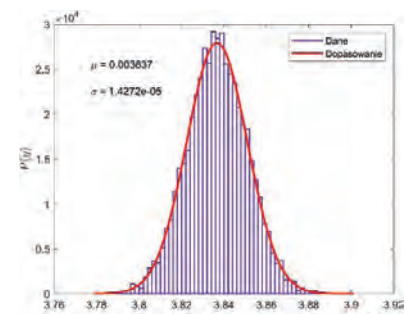
**Rys. 17. Dopasowanie funkcji gęstoci prawdopodobiestwa rozkładu połozenia robota wzdłuz osi  $y$ , w chwili  $t = 3,5$  s dla trasy 2**  
Fig. 17. Fitting the probability density function of the robot position distribution along the  $y$ -axis at time  $t = 3.5$  s for Path No. 2



**Rys. 18. Rozrzut wartoci połozenia robota w chwili czasowej  $t = 9,5$  s dla trasy 3**  
Fig. 18. The dispersion of the robot position values at time  $t = 9.5$  s for Path No. 3



**Rys. 19. Dopasowanie funkcji gęstoci prawdopodobiestwa do rozkładu połozenia robota wzdłuz osi  $x$ , w chwili  $t = 9,5$  s dla trasy 3**  
Fig. 19. Fitting the probability density function of the robot position distribution along the  $x$ -axis at time  $t = 9.5$  s for Path No. 2



**Rys. 20. Dopasowanie funkcji gęstości prawdopodobieństwa do rozkładu położenia robota wzdłuz osi  $y$ , w chwili  $t = 9,5$  s dla trasy 3**  
Fig. 20. Fitting the probability density function of the robot position distribution along the  $y$ -axis at time  $t = 9.5$  s for Path No. 2

## 4. Wnioski

W pracy przeprowadzono ocenę niepewności lokalizacji robota mobilnego z wykorzystaniem modelu kinematyki i symulacji Monte Carlo. Badania przeprowadzono dla trzech trajektorii robota. Niepewności standardowe zmiennych wejściowych modelu (tj. prędkości liniowych prawego i lewego koła) wyznaczono z wykorzystaniem enkoderów zainstalowanych w kołach. Wyznaczono rozkłady zmiennych losowych wyjściowych reprezentujących współrzędne  $x$  i  $y$  położenia robota w przestrzeni roboczej.

W wyniku przeprowadzonych badań sformułowano następujące wnioski:

- System OptiTrack wraz z oprogramowaniem Motive stanowi doskonałe narzędzie do lokalizacji robotów mobilnych. Dzięki zastosowaniu systemu OptiTrack w badaniach eksperymentalnych możliwa była redukcja wpływu oddziaływań systematycznych. W przypadku badań prowadzonych w niniejszej pracy system OptiTrack pozwolił na skorygowanie początkowego położenia robota w przestrzeni roboczej.
- W toku badań zaobserwowano znaczące różnice między przebiegami trajektorii, zarejestrowanymi przez system OptiTrack (rys. 10, 11) a przebiegami wartości oczekiwanej położenia uzyskanymi w trakcie symulacji. Stwierdzono, że różnice mogły być wynikiem m.in. uproszczonej struktury modelu kinematyki, nieuwzględniającej pomiarów żyroskopowych (orientacja robota obliczana tylko na podstawie pomiarów odometrycznych). W przyszłych badaniach niezbędne jest przeprowadzenie analizy z uwzględnieniem niepewności pomiarów żyroskopowych.
- Dodatkowo stwierdzono, że przesunięcie między trajektoriami może również wynikać z nieuwzględnienia dynamiki robota w początkowej fazie ruchu, tj. na etapie przyspieszania. Równania modelu kinematyki robota wyznaczają kolejne położenia przy założeniu, że wartości początkowe prędkości liniowych kół są równe wartościom zadany. W rzeczywistości, z uwagi na bezwładność, wartości te są równe zadany dopiero po pewnym czasie. Z tego względu celowe jest przeprowadzenie symulacji uwzględniających uzupełnienie modelu kinematyki o równania dynamiki.
- W symulacjach rozkład zmiennych losowych wyjściowych, tj. rozkład zmiennych reprezentujących współrzędne  $x$  i  $y$  położenia robota w przestrzeni roboczej aproksymowano za pomocą funkcji gęstości prawdopodobieństwa rozkładu normalnego. Uzyskana duża dokładność aproksymacji była wynikiem agregowania zmiennych losowych o rozkładzie jednostajnym, reprezentujących odcinki drogi pokonane przez robota w kolejnych chwilach. Ostatecznie rozkład zmiennych losowych reprezentujących zmienne wyjściowe wraz z upływem czasu dążył do rozkładu normalnego. Tak sformułowany wniosek jest zgodny z centralnym twierdzeniem granicznym.

## Bibliografia

1. Klancar G., Zdesar A., Blazic S., Skrjanc I., Eds., *Wheeled Mobile Robotics*, „Butterworth-Heinemann”, 2017.
2. Rostkowska M., Topolski M., Skrzypczyński P., *A modular mobile robot for multi-robot applications*, „Pomiary Automatyka Robotyka”, Vol. 17, No. 2, 2013, 288–293.
3. Maciel G.M., Pinto M.F., Júnior I.C.D.S., Marcato A.L.M., *Methodology for autonomous crossing narrow passages applied on assistive mobile robots*, „Journal of Control, Automation and Electrical Systems”, Vol. 30, No. 6, 2019, 943–953, DOI: 10.1007/s40313-019-00499-2.
4. Siegwart R., Nourbakhsh Illah R., Scaramuzza D., *Introduction to Autonomous Mobile Robots*, 2<sup>nd</sup> ed., The MIT Press Cambridge, Massachusetts, 2011.
5. Kleinberg J., *The localization problem for mobile robots*, Proceedings 35<sup>th</sup> Annual Symposium on Foundations of Computer Science, 1994, 521–531, DOI: 10.1109/SFCS.1994.365739.
6. Wiech J., *Podążanie za zadaną trajektorią grupy robotów kołowych z użyciem wirtualnych połączeń sprzężysto-tłumiących*, „Pomiary Automatyka Robotyka”, Vol. 27, Nr 3, 2023, 107–117, DOI: 10.14313/PAR\_249/107.
7. Menolotto M., Komaris D.-S., Tedesco S., O’Flynn B., Walsh M., *Motion Capture Technology in Industrial Applications: A Systematic Review*, „Sensors”, Vol. 20, No. 19, 2020, DOI: 10.3390/s20195687.
8. Palacin J., Rubies E., Clotet E., *Systematic Odometry Error Evaluation and Correction in a Human-Sized Three-Wheeled Omnidirectional Mobile Robot Using Flower-Shaped Calibration Trajectories*, „Applied Sciences”, Vol. 12, No. 5, 2022, DOI: 10.3390/app12052606.
9. Almassri A.M.M., Shirasawa N., Purev A., Uehara K., Oshiumi W., Mishima S., Wagatsuma H., *Artificial Neural Network Approach to Guarantee the Positioning Accuracy of Moving Robots by Using the Integration of IMU/UWB with Motion Capture System Data Fusion*, „Sensors”, Vol. 22, No. 15, 2022, DOI: 10.3390/s22155737.
10. Borenstein J., Everett H.R., Feng L., *Navigating mobile robots: Systems and techniques*, A K Peters Ltd, 1996.
11. Thrun S., Burgard W., Fox D. *Probabilistic Robotics*, MIT Press, 2005.
12. Scaramuzza D., Siegwart R., *Appearance-guided monocular omnidirectional visual odometry for outdoor ground vehicles*, „IEEE Transactions on Robotics”, Vol. 24, No. 5, 2008, 1015–1026, DOI: 10.1109/TRO.2008.2004490.
13. Censi A., *An accurate closed-form estimate of ICP’s covariance*, Proceedings 2007 IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2007, 3167–3172, DOI: 10.1109/ROBOT.2007.363961.
14. Fox D., Burgard W., Thrun S., *Markov localization for mobile robots in dynamic environments*, „Journal of Artificial Intelligence Research”, Vol. 11, 1999, 391–427, DOI: 10.1613/jair.616.
15. Pająk G., Pająk I., *Trajectory Planning for Mobile Manipulators with Control Constraints*, „Pomiary Automatyka Robotyka”, R. 27, Nr 2, 2023, 21–30, DOI: 10.14313/PAR\_248/21.
16. Spong M., Hutchinson S., Vidyasagar M., *Robot Modeling and Control*, John Wiley & Sons, 2005.
17. Nemeč D., Šimák V., Janota A., Hruboš M., Bubeníková E., *Precise localization of the mobile wheeled robot using sensor fusion of odometry, visual artificial landmarks and inertial sensors*, „Robotics and Autonomous Systems”, Vol. 112, 2019, 168–177, DOI: 10.1016/j.robot.2018.11.019.
18. Chenavier F., Crowley J.L., *Position estimation for a mobile robot using vision and odometry*, Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation, 1992, DOI: 10.1109/ROBOT.1992.220052.
19. Chong K.S., Kleeman L., *Accurate odometry and error modelling for a mobile robot*, Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation, 1997, DOI: 10.1109/ROBOT.1997.606708.
20. Dudzik S., Szelağ P., Baran J., *Research Studio for Testing Control Algorithms of Mobile Robots*, „International Journal of Electronics and Telecommunications”, Vol. 66, No 4, 2020, 759–768, DOI: 10.24425-ijet.2020.134038.
21. Žlajpah L., Petrič T., *Kinematic calibration for collaborative robots on a mobile platform using motion capture sys-*



- tem, „Robotics and Computer-Integrated Manufacturing”, Vol. 79, 2023, DOI: 10.1016/j.rcim.2022.102446.
22. Al-Kamil S., Szabolcsi R., *Optimizing path planning in mobile robot systems using motion capture technology*, „Results in Engineering”, Vol. 22, 102043, ISSN 2590-1230, 2024, DOI: 10.1016/j.rineng.2024.102043.
23. De Giorgi C., De Palma D., Parlangei G., *Online Odometry Calibration for Differential Drive Mobile Robots in Low Traction Conditions with Slippage*, „Robotics”, Vol. 13, No. 1, 2024, DOI: 10.3390/robotics13010007.
24. Rapalski A., Dudzik S., *Energy Consumption Analysis of the Selected Navigation Algorithms for Wheeled Mobile Robots*, „Energies”, Vol. 16, No. 3, 2023, DOI: 10.3390/en16031532.

## Inne źródła

25. BIPM, IEC, IFCC, ILAC, ISO, IUPAC, IUPAP, and OIML. *Evaluation of measurement data — Guide to the expression of uncertainty in measurement. Joint Committee for Guides in Metrology*, JCGM 100:2008.
26. BIPM, IEC, IFCC, ILAC, ISO, IUPAC, IUPAP, and OIML. *Evaluation of measurement data — Supplement 1 to the “Guide to the expression of uncertainty in measurement” — Propagation of distributions using a Monte Carlo method. Joint Committee for Guides in Metrology*, JCGM 101:2008.

# Analysis of Odometric Localization Uncertainty Using a Motion Capture System and Monte Carlo Simulation

**Abstract:** In recent years, there has been a very dynamic development of technologies related to mobile robots, especially autonomous robots. One of the basic competences of mobile robots is navigation and related localization. The article presents the results of research aimed at estimating the accuracy of localization using the differential drive kinematics model. Experimental and simulation studies of the QBot 2e mobile robot were performed. As part of the experimental studies, hardware-in-the-loop simulations of the robot’s movement along the given paths were carried out with simultaneous speed measurements. The measurement results were used to conduct Monte Carlo simulations aimed at estimating the uncertainty of determining the robot’s position. Based on the research results, it was found that the uncertainty of localization increases with time and the probability densities of random variables representing the robot’s position can be approximated with high accuracy by the Gaussian distribution.

**Keywords:** mobile robot localization, Monte Carlo method, kinematic model

## dr hab. inż. Sebastian Dudzik, prof. PCZ

sebastian.dudzik@pcz.pl  
ORCID: 0000-0002-9559-7115

Specjalizuje się w tematyce termografii w podczerwieni ze szczególnym uwzględnieniem termografii ilościowej oraz badań nieniszczących z wykorzystaniem aktywnej termografii dynamicznej. Jest autorem i współautorem monografii w języku polskim i angielskim oraz rozdziałów w monografiach, a także kilkadziesiąt prac z zakresu dokładności pomiarów w termografii w podczerwieni oraz algorytmów sterowania i przetwarzania danych pomiarowych w systemach robotyki mobilnej. Jest też twórcą oprogramowania do analizy wrażliwości modeli pomiarowych stosowanych w nowoczesnych kamerach termowizyjnych oraz oprogramowania do przetwarzania danych radiometrycznych w paśmie podczerwieni. Jest współautorem czterech patentów zarejestrowanych w Urzędzie Patentowym RP.



## dr inż. Piotr Szelağ

piotr.szelağ@pcz.pl  
ORCID: 0000-0002-9528-3263

Zajmuje się prognozowaniem mocy i energii elektrycznej generowanej przez odnawialne źródła energii oraz integracją tych źródeł w ramach elektrowni wirtualnych. Prowadzi badania naukowe związane z algorytmami lokalizacji robotów mobilnych. W swoich badaniach wykorzystuje narzędzia umożliwiające fuzję sygnałów i zastosowanie jej w algorytmach sterowania robotami mobilnymi.

