

Optymalizacja kolejności pakowania towarów na paletach

Krzysztof Pieńkosz

Politechnika Warszawska, Instytut Automatyki i Informatyki Stosowanej, ul. Nowowiejska 15/19, 00-665 Warszawa

Streszczenie: W artykule analizowane są możliwości wykorzystania robota do pakowania towarów na paletach. Jeżeli towary mają zróżnicowane wymiary, to istotna jest kolejność ich ładowania. Po pierwsze, żeby robot mógł umieścić towar na częściowo załadowanej palecie, musi mieć swobodny dostęp do miejsca jego ułożenia, tzn. miejsce to nie może być zasłonięte. Po drugie, sposób wyboru kolejnych towarów do pakowania może mieć wpływ na czas zapakowania palety, gdyż dostarczenie poszczególnych towarów z magazynu może być mniej lub bardziej czasochłonne. W artykule przedstawiona jest metoda wyznaczania kolejności umieszczania towarów na palecie przez robota, biorąca pod uwagę oba te względy. W zaproponowanym algorytmie wykorzystuje się grafowy model reprezentujący sposób zapakowania palety.

Słowa kluczowe: załadunek palet, kolejność pakowania, pakowanie robotowe, zagregowane grafy poprzedzania, multisortowanie topologiczne

1. Wprowadzenie

Do transportu i składowania produktów często wykorzystuje się palety. W magazynach na paletach przechowywane są towary jednego typu. Zamówienia ze sklepów detalicznych zwykle dotyczą jednak zróżnicowanego asortymentu. W związku z tym, pojawia konieczność załadowania do wysyłki wymaganych towarów na palety i chcąc zautomatyzować ten proces, wykorzystuje się do tego roboty.

Gdy różnorodność zamawianych towarów jest duża, określenie sposobu ich układania na palecie może sprawiać sporo trudności. Po pierwsze, należy wyznaczyć *wzór upakowania* towarów, czyli miejsca umieszczenia poszczególnych towarów na palecie. Dąży się przy tym do tego, aby przestrzeń nad paletą była w jak największym stopniu wykorzystana. Po drugie trzeba określić kolejność pakowania towarów przez robota. W literaturze dość szeroko są opisane różnorodne metody i algorytmy wyznaczenia wzorów upakowania. Obszerny przegląd tych metod można znaleźć m.in. w [1, 5, 7, 8].

Artykuł dotyczy tej drugiej kwestii, tzn. określenia właściwej kolejności pakowania towarów. Mając bowiem wyznaczony wzór upakowania, nie jest oczywiste w jakiej kolejności poszczególne towary powinny być umieszczane na palecie przez robota. Musi to być taka kolejność, żeby miejsce ustawienia

towaru, wynikające z wzoru upakowania, nie było zasłonięte przez inne wcześniej załadowane produkty. Kolejność pakowania spełniająca taki warunek będzie nazywana *dopuszczalną kolejnością pakowania*.

Zwykle istnieje więcej niż jedna dopuszczalna kolejność pakowania palety. Można się wtedy zastanawiać, która z nich jest bardziej korzystna. Bierze tu się pod uwagę to, że nie wszystkie towary, które mają być zapakowane na palecie są jednakowo dostępne. Niektóre z nich znajdują się przy stanowisku pakowania, a inne trzeba dostarczyć z magazynu, co wymaga dodatkowego czasu. Chodzi więc o to, aby tak skoordynować kolejność pakowania towarów, aby operacji dostarczania ich z magazynu było jak najmniej.

W rozdziale 2 przedstawiona jest metoda, która pozwala sprawdzić, czy dla danego wzoru upakowania istnieje dopuszczalna kolejność pakowania towarów na palecie, uwzględniająca uwarunkowania pracy robota. Metoda ta wykorzystuje koncepcję zagregowanych grafów poprzedzania oraz algorytm multisortowania topologicznego zbioru grafów. Rozdział 3 dotyczy optymalizacji kolejności pakowania. Przewidziona jest tam propozycja algorytmu, który można zastosować w celu wyboru jak najkorzystniejszej kolejności pakowania towarów na palecie. W rozdziale 4 zawarto końcowe wnioski i podsumowanie.

2. Dopuszczalne kolejności pakowania

Towary umieszczane na paletach są zwykle przewożone w opakowaniach zbiorczych, np. kartonach, zgrzewkach opakowanych folią, tackach, itp. W dalszej części artykułu takie opakowania będą nazywane *paczkami*. Mają one przeważnie kształty zbliżone do prostopadłościanów i w związku z tym są układane na paletach równolegle do jej boków.

Autor korespondujący:

Krzysztof Pieńkosz, Krzysztof.Pienkosz@pw.edu.pl

Artykuł recenzowany

nadesłany 14.11.2024 r., przyjęty do druku 24.01.2025 r..



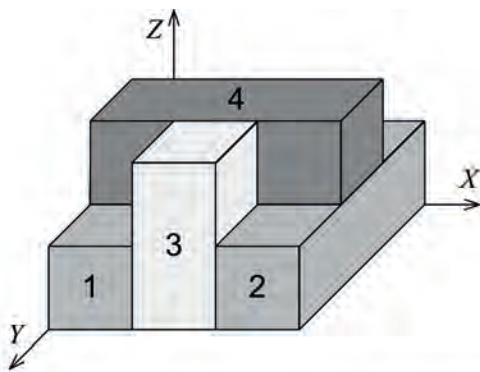
Zezwala się na korzystanie z artykułu na warunkach licencji Creative Commons Uznanie autorstwa 4.0 Int.

Żeby umieścić paczkę na palecie, robot musi mieć swobodny dostęp do miejsca jej położenia. W zależności od konstrukcji robota i jego zdolności manipulacyjnych, te wymagania mogą mieć różny charakter. W pracy [2] wprowadzono pojęcie upakowania robotowego (ang. *robot packing*). Jest to upakowanie, które da się ułożyć startując z dolnego, tylnego, lewego rogu palety i wstawiając kolejne paczki tak, żeby były one zawsze nad, przed i z prawej strony poprzednio ułożonych paczek. Odpowiada to sytuacji, gdy ramię robota pakującego znajduje się przed przednią stroną palety i do wstawienia paczki w określone miejsce, musi być wolny dostęp od góry, od przodu i z prawej strony. W niniejszym artykule taki sposób pakowania będzie nazywany *pakowaniem jednostronnym* palety, zaś kolejność pakowania towarów spełniającą powyższe warunki – dopuszczalną kolejnością dla pakowania jednostronnego.

Istnieją też stanowiska pakujące o większej funkcjonalności, umożliwiające pakowanie paczek z każdej strony palety, np. przez robota z ramieniem umieszczonym nad paletą lub poprzez obrót palety. Wystarczy wtedy, żeby robot miał pustą przestrzeń od jednej ze stron palety, a także od góry i od co najmniej jednego z boków paczki. Taki sposób pakowania palety będzie nazywany *pakowaniem wielostronnym*. Oczywiście dopuszczalna kolejność pakowania jednostronnego jest też kolejnością dopuszczalną dla pakowania wielostronnego, ale odwrotna zależność nie zawsze zachodzi.

Dla danego wzoru upakowania, niech N będzie zbiorem paczek zapakowanych na palecie. Położenie tych paczek $i \in N$ jest określane przez współrzędne (x_i, y_i, z_i) ich dolnego, tylnego, lewego rogu w układzie współrzędnych X, Y, Z , gdzie oś X jest skierowana w prawo, oś Y do przodu, a oś Z do góry (jak na rys. 1). Punkt $(0, 0, 0)$ to dolny, tylny, lewy róg palety. Wymiary poszczególnych paczek wzdłuż osi X, Y oraz Z będą oznaczane odpowiednio jako l_i, w_i oraz h_i .

Okazuje się, że nie dla każdego wzoru upakowania istnieje dopuszczalna kolejność dla pakowania jednostronnego, czy nawet wielostronnego. Na rys. 1 jest przedstawiony przykład upakowania palety, które nie da się ułożyć stosując pakowanie jednostronne. Paczka 4 musi być bowiem załadowana po paczce 2, bo na niej leży, a jednocześnie przed paczką 3, która ją zasłania od przodu. Z tego wynika, że paczka 3 musiałaby



Paczka	Wymiary			Współrzędne (x_i, y_i, z_i)
	l_i	w_i	h_i	
1	1	3	1	(0, 0, 0)
2	1	3	1	(2, 0, 0)
3	1	1	2	(1, 2, 0)
4	3	1	1	(0, 1, 1)

Rys. 1. Przykładowe upakowanie palety (paczki 1 i 2 są identyczne)
Fig. 1. An example packing pattern (items 1 and 2 are identical)

być ułożona po paczce 2. Jest to jednak niemożliwe, bo paczka 2 zasłania paczkę 3 z prawej strony.

W przypadku przykładu z rys. 1 istnieje natomiast kilka dopuszczalnych kolejności dla pakowania wielostronnego, np. 2-3-1-4 z lewej lub od tylnej strony palety. Gdyby jednak trzeba było ułożyć jeszcze jedną dodatkową paczkę identyczną jak 3 w miejscu o współrzędnych $(1, 0, 0)$, czyli tuż za paczką 4, to wówczas nie istniałaby żadna dopuszczalna kolejność nawet dla pakowania wielostronnego.

W pracy [4] zaproponowano metodę wyznaczania dopuszczalnych kolejności dla pakowania jednostronnego oraz wielostronnego, o ile takie dopuszczalne kolejności istnieją. Metoda ta bazuje na grafowej reprezentacji upakowania palety [9]. Dla danego upakowania, *graf poprzedzania* $G_X = (V_X, E_X)$ dla osi X to graf skierowany, w którym:

- każdej paczce $i \in N$ odpowiada jeden wierzchołek $v_i \in V_X$,
- istnieje łuk od wierzchołka v_i do v_j wtedy i tylko wtedy, gdy $x_i + l_i \leq x_j$, gdzie l_i jest wymiarem paczki i wzdłuż osi X .

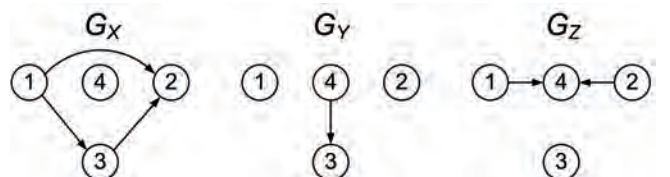
Graf G_X określa wzajemne położenie zapakowanych paczek wzdłuż osi X . Łuk od wierzchołka v_i do v_j w tym grafie oznacza, że paczka j znajduje się całkowicie po prawej stronie paczki i . Analogicznie zdefiniowane są grafy poprzedzania G_Y oraz G_Z dla osi Y oraz Z . Każdy z tych grafów jest zawsze grafem acyklicznym, tzn. nie zawiera skierowanych cykli. Na rys. 2 są przedstawione grafy poprzedzania dla upakowania z rys. 1.

Dopuszczalną kolejność pakowania paczek można wyznaczyć na podstawie zagregowanych grafów poprzedzania [4]. Dla grafów poprzedzania G_X, G_Y, G_Z odpowiadających danemu upakowaniu palety, *zagregowany graf poprzedzania* to graf skierowany, w którym:

- zbiór wierzchołków jest taki sam jak w G_X, G_Y oraz G_Z ,
- istnieje łuk od wierzchołka v_i do v_j wtedy i tylko wtedy, gdy w jednym z grafów G_X, G_Y bądź G_Z istnieje łuk od v_i do v_j i w żadnym z tych grafów nie ma łuku przeciwnie skierowanego, tzn. od v_j do v_i .

Taki zagregowany graf poprzedzania będzie oznaczany symbolem $G_X + G_Y + G_Z$. Określa on dopuszczalną kolejność pakowania przez robota poszczególnych par paczek. Jeżeli w grafie $G_X + G_Y + G_Z$ występuje łuk od wierzchołka v_i do v_j to paczka j jest powyżej, bądź z przodu, albo z prawej strony paczki i , a zatem przy pakowaniu jednostronnym musi być później od niej wstawiona. Z drugiej strony, jeżeli w grafie $G_X + G_Y + G_Z$ wierzchołki v_i i v_j nie są połączone łukiem, to paczki i oraz j nie zasłaniają się nawzajem i mogą być pakowane w dowolnej kolejności.

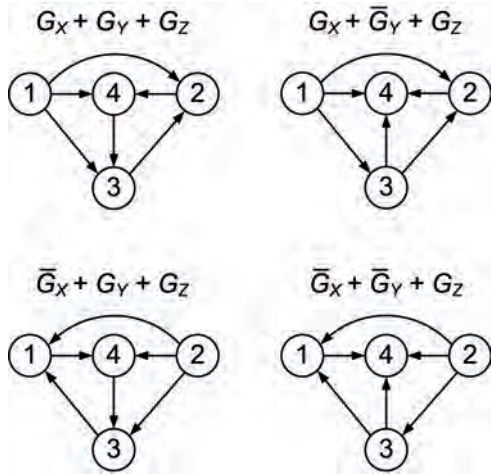
W przypadku pakowania wielostronnego można ustawiać paczki z dowolnej strony palety. Aby to uwzględnić, niech \bar{G}_X będzie grafem, który różni się od grafu poprzedzania G_X tym, że wszystkie łuki są przeciwnie skierowane. Graf ten jest więc też grafem poprzedzania, ale w kierunku przeciwnym do osi X i opisuje dopuszczalną kolejność pakowania elementów od tej strony. W analogiczny sposób zdefiniowany jest graf poprzedzania \bar{G}_Y . Grafy $G_X + G_Y + G_Z, G_X + \bar{G}_Y + G_Z, G_X + G_Y + G_Z, \bar{G}_X + \bar{G}_Y + G_Z$ będą więc opisywać ograniczenia dotyczące kolejności pakowania paczek z poszczególnych czterech



Rys. 2. Grafy poprzedzania dla przykładu z rys. 1
Fig. 2. The comparability graphs for the example presented in Fig. 1

stron palety. Grafy te nie zawsze będą grafami acyklicznymi. Na rys. 3 są przedstawione zagregowane grafy poprzedzania dla upakowania z rys. 1.

Na podstawie zagregowanych grafów poprzedzania można określić dopuszczalną kolejność pakowania, stosując *algorytm multisortowania topologicznego* zaproponowany w pracy [4] o złożoności obliczeniowej $O(|N|^2)$.



Rys. 3. Zagregowane grafy poprzedzania dla przykładu z rys. 1
Fig. 3. The aggregated precedence graphs for the example from Fig. 1

Algorytm 1 Multisortowanie topologiczne zbioru grafów \mathcal{G}

```

1:  $n \leftarrow |N|$ 
2: while  $n > 0$  do
3:   Znajdź wierzchołek  $v$ , z którego nie wychodzi luk w
   przynajmniej jednym z grafów  $G \in \mathcal{G}$ 
4:   if taki wierzchołek istnieje then
5:     Przypisz wierzchołkowi  $v$  numer  $n$ 
6:   else
7:     stop {nie jest możliwe ponumerowanie wszystkich
   wierzchołków, bo w każdym z grafów  $G \in \mathcal{G}$  jest
   cykl}
8:   end if
9:   We wszystkich grafach  $G \in \mathcal{G}$  usuń wierzchołek  $v$ 
   oraz łuki dochodzące i wychodzące z niego
10:   $n \leftarrow n - 1$ 
11: end while
    
```

W przypadku, gdy zostaną ponumerowane wszystkie wierzchołki, czyli zmienna n osiągnie wartość 1, to numery przypisane wierzchołkom będą określały dopuszczalną kolejność pakowania paczek na palecie. Jeżeli na wejściu algorytmu zbiór \mathcal{G} składa się tylko z jednego grafu $G_X + G_Y + G_Z$, to będzie to dopuszczalna kolejność dla pakowania jednostronnego. Wtedy algorytm multisortowania topologicznego sprowadza się do dobrze znanego w teorii grafów klasycznego sortowania topologicznego [3]. Jeżeli zbiór \mathcal{G} będzie się składał z czterech grafów: $G_X + G_Y + G_Z$, $G_X + \bar{G}_Y + G_Z$, $\bar{G}_X + G_Y + G_Z$, $\bar{G}_X + \bar{G}_Y + G_Z$, to algorytm multisortowania topologicznego będzie wyznaczał dopuszczalną kolejność dla pakowania wielostronnego. Gdy zmienna n nie osiągnie wartości 1, gdyż w każdym z grafów ze zbioru \mathcal{G} występuje cykl, to nie istnieje dopuszczalna kolejność pakowania, czyli robot nie jest w stanie bezkolizyjnie zapakować wszystkich paczek zgodnie z zadanym wzorem upakowania palety.

W algorytmie multisortowania topologicznego dokonujemy w istocie tak jakby rozpakowywania palety, zdejmując w każdym kroku jedną paczkę, która nie jest zasłonięta dla robota. Odwrotna kolejność odpowiada więc dopuszczalnej kolejności pakowania i dlatego w kolejnych iteracjach wierzchołkom są przypisywane malejące numery. Zapamiętując typ grafu zagregowanego, w którym znaleziono wierzchołek bez wychodzących luków, mamy też informację, od której strony palety należy wstawić paczkę reprezentowaną przez ten wierzchołek.

Analizując dopuszczalność pakowania przykładu z rys. 1 w przypadku pakowania jednostronnego, należy zastosować algorytm multisortowania topologicznego tylko dla grafu $G_X + G_Y + G_Z$ (rys. 3). Okaże się wówczas, że już w pierwszej iteracji zostanie wykryty cykl, gdyż w tym grafie nie ma wierzchołka bez wychodzących luków. Ten cykl tworzą wierzchołki 2, 4, 3. Oznacza to, że nie istnieje dopuszczalna kolejność dla pakowania jednostronnego.

W przypadku pakowania wielostronnego, algorytm multisortowania topologicznego należy zastosować dla wszystkich czterech zagregowanych grafów poprzedzania z rys. 3. W pierwszej iteracji algorytmu zostanie wybrany wierzchołek 4, bo jest to jedyny wierzchołek, który nie ma wychodzących luków ani w grafie $G_X + \bar{G}_Y + G_Z$, ani w $\bar{G}_X + G_Y + G_Z$. Paczka 4 musi więc być umieszczana jako ostatnia albo z tyłu palety (z kierunku przeciwnego do osi Y), albo z lewej strony (kierunek osi X), bądź prawej strony (kierunek przeciwny do osi X). W drugiej iteracji będzie wybrany wierzchołek 1 lub 2, a potem pozostałe wierzchołki w dowolnej kolejności. W związku z tym istnieją cztery dopuszczalne kolejności dla pakowania wielostronnego: 2-3-1-4, 3-2-1-4, 1-3-2-4 oraz 3-1-2-4.

3. Optymalizacja kolejności pakowania

Niezależnie od tego, czy mamy do czynienia z pakowaniem jednostronnym czy wielostronnym, często istnieje kilka dopuszczalnych kolejności pakowania dla zadanego wzoru upakowania. Biorąc pod uwagę dostępność poszczególnych typów paczek, nie wszystkie kolejności są jednakowo korzystne. Dotyczy to zwłaszcza sytuacji, gdy trzeba zapakować nie pojedyncze paczki, ale większą liczbę paczek tego samego typu, np. 10 zgrzewek wody mineralnej, 5 kartonów masła, 6 tacek tego samego jogurtu, itp. We wzorze upakowania jednakowe paczki mogą być rozmieszczone w różnych miejscach na palecie, niekoniecznie obok siebie.

Do stanowiska pakowania dostarcza się z magazynu palety magazynowe załadowane jednakowymi paczkami. Po pobraniu i zapakowaniu stosownej liczby takich paczek, żeby umieścić paczki innego typu na pakowanej dla odbiorcy palecie, trzeba dostarczyć z magazynu paletę z tymi paczkami i zastąpić poprzednią paletę magazynową. Operacja ta będzie nazywana *przestawianiem palet magazynowych*. Przestawianie palet magazynowych jest czasochłonne, gdyż wiąże się z odstawieniem poprzedniej palety magazynowej i dostarczeniem nowej. Dlatego w procesie optymalizacji, mając do wyboru kilka dopuszczalnych kolejności pakowania palety, warto wybrać taką kolejność, która wymaga najmniejszej liczby operacji przestawiania palet magazynowych. Poniżej zostanie przedstawiona propozycja algorytmu, który dokonuje takiej optymalizacji.

Proponowany algorytm optymalizacji kolejności pakowania paczek na palecie bazuje na grafowej reprezentacji upakowania w postaci zagregowanych grafów poprzedzania i jest rozwinięciem koncepcji multisortowania topologicznego. Wyznaczając dopuszczalną kolejność pakowania paczek na palecie, w każdej iteracji algorytmu multisortowania topologicznego, spośród wierzchołków, z których nie wychodzi żaden łuk, jest wybierany wierzchołek dowolny. Aby określić najkorzystniejszą kolejność

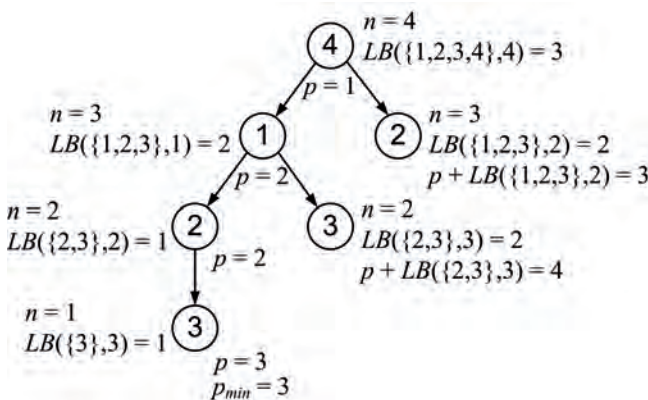
pod względem liczby przestawień palet magazynowych, należałoby wziąć pod uwagę wszystkie możliwości wyboru takich wierzchołków. W rezultacie rozpatrzenia różnych możliwości jest tworzone drzewo przeglądu. Każda ścieżka od liścia do korzenia takiego drzewa reprezentuje wtedy jedną z dopuszczalnych kolejności pakowania, spośród których należy wybrać wariant z najmniejszą liczbą przestawień. Poszczególne wierzchołki drzewa mają tyle gałęzi, ile w zagregowanych grafach poprzedzania odpowiadających paczkom, które jeszcze nie były rozpatrywane, jest wierzchołków bez wychodzących luków.

Aby ograniczyć wielkość drzewa i proces przeglądu takiego drzewa, można, podobnie jak w metodzie podziału i oszacowań [6], wykorzystać oszacowania. Niech w trakcie budowania drzewa przeglądu, N_v oznacza zbiór paczek, które jeszcze nie były rozpatrywane w danej gałęzi, a $K(N_v)$ zbiór różnych typów paczek w zbiorze N_v . Gdy nie ma żadnych identycznych paczek w zbiorze N_v , to oczywiście $K(N_v) = N_v$, ale w ogólnym przypadku $|K(N_v)| \leq |N_v|$. Niech $LB(N_v, u)$ oznacza dolne oszacowanie na liczbę przestawień, które trzeba będzie dokonać dla załadowania paczek ze zbioru N_v , zakładając, że bezpośrednio przed paczką reprezentowaną przez wierzchołek v będzie pakowana paczka u . Możemy przyjąć, że $LB(N_v, u) = |K(N_v)|$, gdy paczka u jest innego typu niż v i $LB(N_v, u) = |K(N_v)| - 1$, gdy paczka u jest taka sama jak v . To oszacowanie będzie stosowane po pierwsze, żeby określić, które gałęzie drzewa należy w pierwszej kolejności rozpatrywać. Drzewo przeglądu będzie rozbudowywane w głąb z wyborem w pierwszej kolejności tego wierzchołka, dla którego oszacowanie jest najmniejsze. Po drugie, oszacowanie będzie wykorzystywane do pomijania w przeglądzie gałęzi, dla których na podstawie tego oszacowania można stwierdzić, że na pewno nie prowadzą do lepszych rozwiązań od już znalezionych.

Schemat algorytmu optymalizacji kolejności pakowania paczek na palecie jest przedstawiony poniżej w postaci rekurencyjnej procedury *OPTSEQ*. Parametry v, N_v, n, p mają charakter lokalny i oznaczają kolejno:

- v – wierzchołek odpowiadający paczce, która została rozpatrzona jako dotychczas ostatnia,
- N_v – zbiór paczek do rozpatrzenia, które pozostały po ponumerowaniu wierzchołka v ,
- n – numer określający kolejność pakowania,
- p – liczba koniecznych przestawień dla dostarczenia już rozpatrzonych paczek.

Zmienna p_{min} jest globalna i określa liczbę przestawień dla najlepszej znalezionej kolejności pakowania. Symbol $\mathcal{G}(N_v)$ oznacza zaś zbiór zagregowanych grafów poprzedzania z \mathcal{G} , zredukowanych do wierzchołków odpowiadających tylko paczkom ze zbioru N_v , czyli zawierających tylko te wierzchołki i luki między nimi.



Rys. 4. Drzewo przeglądu dla przykładu z rys. 1
Fig. 4. The search tree for the example presented in Fig. 1

Wartości początkowe przy pierwszym wywołaniu procedury *OPTSEQ* są następujące: $v = 0, N_v = N, n = |N|, p = 0, p_{min} = |N| + 1$. Dla formalności, dostarczenie pierwszej palety magazynowej na stanowisko pakowania też jest traktowane jako operacja przestawienia. Dlatego $v = 0$ jest sztuczną wartością początkową, aby na początku to przestawienie było również zliczane w zmiennej p . Podobnie sztuczną – zawyżoną wartością początkową jest $p_{min} = |N| + 1$. Wszystkich przestawień może być co najwyżej $|N|$, więc jeżeli w trakcie wykonywania algorytmu wartość zmiennej p_{min} się nie zmniejszy i taka pozostanie po zakończeniu algorytmu, to oznacza, że nie istnieje dla robota żadna dopuszczalna kolejność jej pakowania.

Algorytm 2 Algorytm optymalizacji kolejności pakowania

OPTSEQ(v, N_v, n, p);

- 1: Utwórz listę T zawierającą wierzchołki, które nie mają wychodzących luków w przynajmniej jednym z grafów ze zbioru $\mathcal{G}(N_v)$
- 2: Uporządkuj wierzchołki u w liście T według niemalejących wartości oszacowań $LB(N_v, u)$
- 3: **for** $u \in T$ zgodnie z uporządkowaniem listy T **do**
- 4: **if** $p + LB(N_v, u) < p_{min}$ **then**
- 5: Przypisz wierzchołkowi u numer n
- 6: $n \leftarrow n - 1$
- 7: **if** paczki odpowiadające v i u różnią się **then**
 {aktualizacja liczby przestawień}
- 8: $p \leftarrow p + 1$
- 9: **end if**
- 10: **if** $n > 0$ **then**
- 11: *OPTSEQ*($u, N_v \setminus \{u\}, n, p$);
- 12: **else if** $p < p_{min}$ **then** {znaleziono lepszą kolejność pakowania}
- 13: $p_{min} \leftarrow p$
- 14: Aktualizuj najlepsze znalezione rozwiązanie
- 15: **end if**
- 16: **end if**
- 17: **end for**

Powyższy algorytm wyznacza optymalną kolejność pakowania paczek na palecie lub stwierdza, że nie ma żadnej dopuszczalnej kolejności pakowania. Algorytm można nieco usprawnić kończąc go w momencie, gdy p_{min} osiągnie wartość $|K(N)|$, będącą dolnym oszacowaniem liczby przestawień dla zbioru wszystkich paczek N . Lepszego rozwiązania już się bowiem nie uzyska, dalej kontynuując obliczenia. Jeżeli w liście T jest kilka wierzchołków o takim samym oszacowaniu $LB(N_v, u)$, to warto w pierwszej kolejności rozpatrywać te, które odpowiadają najliczniej występującym paczkom w zbiorze N_v .

Prześledźmy działanie powyższego algorytmu dla przykładu upakowania z rys. 1 i pakowania wielostronnego. Paczki 1 i 2 są jednakowe, natomiast pozostałe są innych typów. Drzewo przeglądu tworzone podczas poszukiwania optymalnej kolejności pakowania dla tego przykładu jest przedstawione na rys. 4.

Na początku, przy pierwszym wywołaniu procedury rekurencyjnej *OPTSEQ* mamy $v = 0, N_0 = N = \{1, 2, 3, 4\}, n = 4, p = 0$ oraz $p_{min} = 5$. Zbiór $\mathcal{G}(N_0)$ składa się z zagregowanych grafów poprzedzania przedstawionych na rys. 3. Jedynym wierzchołkiem, z którego nie wychodzi żaden luk w przynajmniej w jednym z tych grafów jest wierzchołek 4, a zatem zostanie mu przypisany numer $n = 4$. Oznacza to, że paczka 4 będzie pakowana jako ostatnia. Na stanowisko pakowania musi więc być dostarczona paleta magazynowa z paczką 4, a zatem p przyjmuje wartość 1.

Przy drugim (rekurencyjnym) wywołaniu procedury *OPTSEQ* jest $v = 4$, $N_1 = \{1, 2, 3\}$, $n = 3$ oraz $p = 1$. W zredukowanych zagregowanych grafach poprzedzania nie będzie już wierzchołka 4 i wówczas wierzchołek 1 nie będzie miał wychodzących łuków np. w grafie $\bar{G}_X + \bar{G}_Y + G_Z$, a wierzchołek 2 w grafie $G_X + \bar{G}_Y + G_Z$. Lista T będzie składała się z tych dwóch wierzchołków i w drzewie przeglądu pojawią się dwie gałęzie. Paczki 1 i 2 są jednakowe, ale inne niż paczka 3 i rozpatrywana wcześniej paczka 4. Zatem dla obu tych wierzchołków mamy takie samo oszacowanie $LB(\{1, 2, 3\}, 1) = LB(\{1, 2, 3\}, 2) = |K(\{1, 2, 3\})| = 2$. Zostanie więc wybrany dowolny z nich np. wierzchołek 1 i zwiększy się wtedy liczba przestawień do $p = 2$.

Przy trzecim wywołaniu procedury *OPTSEQ* będzie $v = 1$, $N_1 = \{2, 3\}$, $n = 2$ oraz $p = 2$. W zredukowanych zagregowanych grafach poprzedzania zbioru $\mathcal{G}(N_1)$ wystąpią więc tylko wierzchołki: 2 i 3. W grafie $G_X + \bar{G}_Y + G_Z$ wierzchołek 2 nie będzie miał wychodzącego łuku, a w grafie $\bar{G}_X + \bar{G}_Y + G_Z$ wierzchołek 3. Pojawia się więc znowu dwie gałęzie w drzewie przeglądu. Ze względu na to, że gałęzie te wychodzą z wierzchołka 1, który reprezentuje taką samą paczkę jak wierzchołek 2, to wierzchołek 2 będzie rozpatrywany i ponumerowany jako następny. Ma on bowiem mniejsze dolne oszacowanie niż wierzchołek 3. Nie zwiększy się przy tym liczba przestawień i pozostanie $p = 2$.

Przy czwartym wywołaniu procedury *OPTSEQ*, zagregowane grafy poprzedzania zredukują się do tylko jednego wierzchołka – wierzchołka 3. Zostanie mu przypisany numer $n = 1$ i liczba przestawień się zwiększy do $p = 3$. W tym momencie uzyskujemy pierwsze pełne rozwiązanie dopuszczalne odpowiadające kolejności pakowania 3-2-1-4 z $p = 3$ przestawieniami. Zmienna p_{min} przyjmie wartość 3. Po wyznaczeniu tego rozwiązania, nastąpi rekurencyjny powrót w drzewie przeglądu i będą rozpatrywane dwie pozostałe boczne gałęzie. Ponieważ jednak z oszacowań wynika, że w obu tych gałęziach nie uzyskamy mniejszej liczby przestawień niż 3 (linia 4 procedury *OPTSEQ*), więc gałęzie te nie będą dalej rekurencyjnie rozbudowywane i algorytm się zakończy. Wynika z tego, że kolejność pakowania 3-2-1-4 z trzema przestawieniami, jest rozwiązaniem optymalnym. Nie ma innej dopuszczalnej kolejności pakowania z mniejszą liczbą przestawień.

Algorytm można było też zakończyć wcześniej bez konieczności rozpatrywania bocznych gałęzi, bo w momencie wyznaczenia pierwszego dopuszczalnego rozwiązania, zmienna p_{min} przyjęła wartość 3 równą $|K(N)|$, czyli dolnemu oszacowaniu na liczbę wszystkich możliwych przestawień. Zatem takie rozwiązanie musi być optymalne, bo na podstawie wartości oszacowania $|K(N)|$ mamy pewność, że lepszego rozwiązania już nie ma.

4. Podsumowanie

W artykule zaproponowano metodę wyznaczania kolejności pakowania towarów na palecie, która bierze po uwagę zarówno możliwość, jak i efektywność realizacji tego procesu przez robota. Pokazano jak można zastosować tę metodę w przypadku, gdy robot jest w stanie pakować towary tylko z jednej strony palety oraz bardziej uniwersalnego stanowiska pakującego, gdy można umieszczać towary z różnych jej stron. Przy wyznaczaniu najkorzystniejszej kolejności pakowania towarów istotne znaczenie ma wykorzystanie grafowej reprezentacji upakowania palety oraz zastosowanie oszacowań, które pozwalają znacząco ograniczyć wielkość drzewa przeglądu i czas obliczeń.

Bibliografia

1. Ali S., Ramos A.G., Carravilla M.A., Oliveira J.F., *On-line three-dimensional packing problems: A review of off-line and on-line solution approaches*, "Computers & Industrial Engineering", Vol. 168, 2022, DOI: 10.1016/j.cie.2022.108122.
2. den Boef E., Korst J., Martello S., Pisinger D., Vigo D., *Erratum to "The three-dimensional bin packing problem": Robot-packable and orthogonal variants of packing problems*, "Operations Research", Vol. 53, No. 4, 2005, 735–736, DOI: 10.1287/opre.1050.0210.
3. Cormen T., Leiserson C., Rivest R., *Wprowadzenie do algorytmów*, WNT, Warszawa, 1997.
4. Pieńkosz K., *Wyznaczanie sposobu pakowania palet dla robota*, "Pomiary Automatyka Robotyka", R. 25, Nr 2, 2021, 11–16, DOI: 10.14313/PAR_240/11.
5. Silva E.F., Toffolo T.A.M., Wauters T., *Exact methods for three-dimensional cutting and packing: A comparative study concerning single container problems*, "Computers & Operations Research", Vol. 109, 2019, 12–27, DOI: 10.1016/j.cor.2019.04.020.
6. Walukiewicz S., *Programowanie dyskretne*, PWN, Warszawa, 1986.
7. Zhao X., Bennell J.A., Bektas T., Dowsland K., *A comparative review of 3D container loading algorithms*, "International Transactions in Operational Research", Vol. 23, No 1–2, 2016, 287–320, DOI: 10.1111/itor.12094.
8. Zhu W., Oon W., Lim A., Weng Y., *The six elements to block-building approaches for the single container loading problem*, "Applied Intelligence", Vol. 37, 2012, 431–445, DOI: 10.1007/s10489-012-0337-0.
9. Zhu W., Zhang Z., Oon W.-C., Lim A., *Space defragmentation for packing problems*, "European Journal of Operational Research", Vol. 222, No. 3, 2012, 452–463, DOI: 10.1016/j.ejor.2012.05.031.

Optimization of the Loading Sequence of Goods on Pallets

Abstract: In the paper the capability of using a robot to pack goods on pallets is analyzed. If the goods have different dimensions, the sequence in which they are loaded is important. First, in order to place the goods on a partially loaded pallet, the robot must have free access to their location, i.e. the location must not be covered. Second, the way in which the next goods to be packed are selected can affect the time it takes to load a pallet, since it can take more or less time to deliver individual goods from the warehouse. This paper presents a method for determining the order in which goods should be placed on a pallet by a robot, taking into account both of these considerations. The proposed algorithm uses the graph model representing a pallet packing.

Keywords: pallet loading, packing sequence, robot packing, aggregated precedence graphs, topological sort

dr hab. inż. Krzysztof Pieńkosz

Krzysztof.Pienkosz@pw.edu.pl
ORCID: 0000-0001-9437-7594



Absolwent Wydziału Elektroniki i Technik Informatycznych Politechniki Warszawskiej (1984). W latach 1984–1986 pracował w Instytucie Górnictwa Naftowego i Gazownictwa, a od 1986 r. jest zatrudniony w Instytucie Automatyki i Informatyki Stosowanej Politechniki Warszawskiej. Uzyskał stopień doktora nauk technicznych w 1992 r. i w 2011 r. doktora habilitowanego. Jego zainteresowania naukowe dotyczą badań operacyjnych, w szczególności metod optymalizacji dyskretnej, algorytmów rozwiązywania problemów kombinatorycznych oraz zagadnień planowania i harmonogramowania.