

Identyfikacja parametryczna nieliniowych i liniowych modeli matematycznych silnika BLDC

Łukasz Zawarczyński

Politechnika Świętokrzyska, Wydział Elektrotechniki, Automatyki i Informatyki, al. Tysiąclecia Państwa Polskiego 7, 25-314 Kielce

Streszczenie: W artykule przedstawiono wyniki analizy procesu identyfikacji parametrycznej typowych modeli matematycznych silnika bezszczotkowego prądu stałego z komutatorem elektronicznym BLDC w warunkach off-line. Celem analizy było zbadanie wpływu zmian warunków obciążenia i zasilania silnika na uzyskiwane wartości parametrów modeli matematycznych. W eksperymentach wykorzystano nieliniowy i liniowy model matematyczny układu napędowego silnika BLDC w formie układu równań różniczkowych poszczególnych faz obwodu elektrycznego silnika BLDC oraz równania różniczkowego odpowiednio zmiennej wejściowej (napięcia zasilania) i wyjściowej (prędkości kątowej). Identyfikowane parametry modeli matematycznych wyznaczano na podstawie pomiarów elektrycznych i mechanicznych wielkości wyjściowych silnika, przy pobudzeniu różnymi wartościami napięcia stojana (w jednostkach względnych). Do identyfikacji nieliniowego oraz liniowego modelu matematycznego silnika zastosowano numeryczną metodę optymalizacji statycznej Nelder-Meada. Identyfikowane parametry modeli wyznaczono dla różnych warunków pracy układu napędowego z obciążeniem inercją masy bezwładności oraz pompą hydrauliczną pracującą w siłowym układzie napędowym z zaworem proporcjonalnym. Moment obciążenia silnika w układzie hydraulicznym uzyskano przez zastosowanie metody dławieniowej zmieniając parametry ciśnienia i przepływu czynnika roboczego. Dokonano także analizy wpływu napięcia zasilania i momentu obciążenia na właściwości statyczne i dynamiczne silnika. Ocenę zbieżności odpowiedzi czasowych układu napędowego zarejestrowanych w eksperymentach i uzyskanych z rozwiązania modeli matematycznych przeprowadzono na podstawie funkcji korelacji. Badania laboratoryjne przeprowadzono w układzie napędowym z silnikiem o mocy 2,5 kW, pracującym w układzie napędowym z pompą tłoczkową.

Słowa kluczowe: silnik BLDC, identyfikacja parametryczna, model matematyczny, model liniowy, model nieliniowy

1. Wprowadzenie

Parametry dowolnego typu silnika często są wyznaczane przez producentów na podstawie danych konstrukcyjnych i podawane w katalogach. Duża różnorodność typów i zakresów mocy silników generuje producentom znaczne koszty związane z koniecznością wykonywania badań identyfikacyjnych. Dlatego w większości przypadków parametry silników są modyfikowane na podstawie bazowej konstrukcji silnika lub obliczeń dokonywanych na etapie projektowania [3, 4]. Dane katalogowe dla określonego modelu silnika nie zawsze są wystarczająco dokładne i kompletne, aby wyznaczyć parametry regulatorów.

Mogą być jednak podstawą do dokładniejszego ich wyznaczenia, np. jako warunki startowe w identyfikacji parametrycznej.

Zmiana charakterystyk statycznych i dynamicznych silnika jest wynikiem zmian wartości fizycznych jego parametrów (np. rezystancji uzwojeń lub masy obciążenia), a także zmian jakościowych zjawisk fizycznych (np. strata mocy, zawartość wyższych harmonicznych w napięciu zasilania, zależność charakterystyk od położenia i prędkości wirnika itd.) [2, 4].

Metody wyznaczania parametrów modelu matematycznego silnika na podstawie bezpośrednich lub pośrednich pomiarów charakterystyk w stanach ustalonych nie są określane z dużą dokładnością, gdyż technika dokonywania eksperymentu pomiarowego często uniemożliwia uwzględnienie nieliniowych i niestacjonarnych zjawisk statycznych i dynamicznych. Wobec zmiennych warunków zasilania, obciążenia i temperatury uzwojeń silnika, na etapie modelowania matematycznego trudno jest te zjawiska pominąć. Większą dokładność identyfikacji można otrzymać stosując metody przetwarzające wyniki pomiarów sygnałów wejściowych i wyjściowych zarówno w stanach nieustalonych, jak i ustalonych silnika. Najczęściej identyfikacji modelu matematycznego silnika BLDC dokonuje się w warunkach *off-line*.

Autor korespondujący:

Łukasz Zawarczyński, l.zawarczyński@tu.kielce.pl

Artykuł recenzowany

nadesłany 30.01.2024 r., przyjęty do druku 11.10.2024 r.



Zezwala się na korzystanie z artykułu na warunkach licencji Creative Commons Uznanie autorstwa 3.0

W literaturze są analizowane różne metody wyznaczania parametrów modelu matematycznego silników ze wzbudzeniem od magnesów trwałych. Są to metody bazujące m.in. na pomiarze prądu międzyszczytowego przy zasilaniu napięciem impulsowym [2], pomiarze charakterystyk w stanie ustalonym [3, 7], pomiarze prądów i napięć przy stałej prędkości [5, 6], czy też wyznaczania charakterystyk czasowych lub częstotliwościowych silnika [8].

W pracy przedstawiono problem identyfikacji parametrycznej w warunkach *off-line* z zastosowaniem numerycznej metody optymalizacji statycznej Nelder-Meada. Metoda ta umożliwia wyznaczanie parametrów modelu matematycznego silnika dla zmiennych warunków zasilania i obciążenia, co pozwala na analizę wpływu tych warunków na właściwości statyczne i dynamiczne silnika. Badania laboratoryjne przeprowadzono w falownikowym układzie napędowym z silnikiem o mocy 2,5 kW. Obciążeniem silnika był moment bezwładności lub napęd pompy hydraulicznej.

2. Model matematyczny silnika BLDC

Model matematyczny dla poszczególnych faz obwodu elektrycznego silnika BLDC przyjęto w postaci [1, 3]:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} i_A &= \frac{1}{L_s} (v_A - R_A i_A - e_A) \\ \frac{d}{dt} i_B &= \frac{1}{L_s} (v_B - R_B i_B - e_B) \\ \frac{d}{dt} i_C &= \frac{1}{L_s} (v_C - R_C i_C - e_C) \end{aligned} \quad (1)$$

gdzie: i_A, i_B, i_C – prądy stojana, odpowiednio w fazie A, B i C; R_A, R_B, R_C – rezystancje uzwojeń fazowych stojana; L_s – indukcyjność uzwojenia fazowego stojana; v_A, v_B, v_C – napięcia fazowe; e_A, e_B, e_C – SEM indukowane w fazach.

W omawianym przypadku zastosowano silnik z sinusoidalnym rozkładem pola magnetycznego, wobec tego SEM w poszczególnych fazach wyraża się zależnościami:

$$\begin{aligned} e_A &= K_e \omega_m \sin \theta \\ e_B &= K_e \omega_m \sin \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) \\ e_C &= K_e \omega_m \sin \left(\theta - \frac{4\pi}{3} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

gdzie: K_e – współczynnik wzbudzenia magnesu trwałego wirnika (stała napięciowa), θ – kąt położenia wału wirnika, ω_m – mechaniczna prędkość kątowa wirnika.

Równanie części mechanicznej przyjęto w postaci

$$\frac{d}{dt} \omega_m = \frac{K_t}{J} (f_A i_A + f_B i_B + f_C i_C) - \frac{M_o}{J} \quad (3)$$

W równaniu (3), często zamiast stałej K_t [Vs/rad] jest wprowadzany parametr K_t [Nm/A], określane jako stała momentowa silnika. Parametr ten jest podawany również w katalogach przez producentów silników. W pracy [3] wykazano, że wartości tych parametrów są identyczne, a więc $K_t = K_e$.

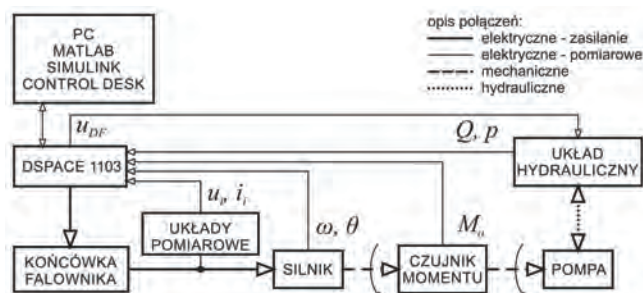
W napędzie elektrycznym wielkością regulowaną jest zazwyczaj prędkość kątowa silnika. Można założyć, że w otoczeniu stałego punktu pracy napędu falownikowego, nieliniowy model matematyczny (1)–(3) można z dobrym przybliżeniem aproksymować za pomocą modelu liniowego typu wejście–wyjście. Do dalszych rozważań przyjęto model liniowy o postaci:

$$T^2 \frac{d^2 \omega(t)}{dt^2} + 2\zeta T \frac{d\omega(t)}{dt} + \omega(t) = K v(t) \quad (4)$$

gdzie: T – stała czasowa układu napędowego, ζ – względny współczynnik tłumienia, K – współczynnik wzmocnienia, v – napięcie wejściowe (pobudzające, stanowiące amplitudę napięcia fazowego).

3. Stanowisko badawcze silnika BLDC

Na rys. 1 zamieszczono schemat blokowy stanowiska badawczego, w którym wyróżniono: końcówkę mocy falownika, silnik BLDC (3000 obr./min, 2,5 kW), pompę z układem hydraulicznym, komputer PC, kartę kontrolno-pomiarową dSpace 1103, układy pomiarowe prądów i napięć fazowych (u_i [V] oraz i_i [A] dla i -tej fazy), układ pomiaru momentu na wale M_o [Nm], pomiar prędkości kątowej ω [rad/s lub obr./min] i położenia wirnika θ [rad], przepływu Q [l/min], ciśnienie w instalacji p [bar] i sygnał sterujący u_{DF} [V] otwarciem proporcjonalnego zaworu dławiącego. Maksymalna moc obciążenia silnika pompą hydrauliczną, przy zmianie wartości jego prędkości obrotowej w zakresie 300–3000 obr./min zmienia się w granicach 0,5–5,75 kW.



Rys. 1. Schemat blokowy stanowiska badawczego
Fig. 1. Block diagram of the research station

Układ sterowania wraz z algorytmem modulacji zaimplementowano w programach MATLAB 2010a i Simulink. Zmiana wartości wielkości wejściowych układu sterowania silnikiem oraz akwizycja danych pomiarowych realizowana była z poziomu aplikacji *ControlDesk 3.7*, przy pomocy karty kontrolno-pomiarowej dSpace 1103, z częstotliwością próbkowania 40 kHz.

4. Identyfikacja parametrów modelu matematycznego silnika BLDC

Sygnałami wejściowymi modelu matematycznego silnika są napięcia fazowe stojana, natomiast sygnałami wyjściowymi – prędkość kątowa, położenie wału wirnika oraz prądy fazowe. Wybór wskaźnika jakości identyfikacji oraz identyfikowanych parametrów ma znaczący wpływ na wyniki identyfikacji. Pomocnym czynnikiem w doborze rejestrowanych sygnałów oraz identyfikowanych parametrów jest analiza funkcji wrażliwości trajektorii czasowej prądu stojana i prędkości kątowej silnika. Na podstawie przeprowadzonej analizy funkcji wrażliwości

liwości stwierdzono, że wyznaczanie wartości parametrów modelu matematycznego silnika powinno odbywać się głównie na podstawie minimalizacji błędu średniokwadratowego modułu I wektora prądu stojana, gdyż wielkość ta wykazuje największą wrażliwość na zmiany wartości identyfikowanych parametrów. Uwzględniając znacznie łatwiejszy technicznie pomiar prędkości kątowej, identyfikacji można także dokonać na podstawie minimalizacji uchybu średniokwadratowego prędkości. Wyznaczanie parametrów modelu matematycznego (1)–(3) na podstawie minimalizacji błędu średniokwadratowego prądu lub prędkości często prowadzi do niejednoznacznych wyników identyfikacji, tzn. uzyskuje się odpowiednio dobre odwzorowanie prądu przez model matematyczny, natomiast niekoniecznie poprawne – prędkości i na odwrót. Ten problem nie występuje jeśli zastosuje się minimalizację wskaźnika o następującej postaci:

$$Q = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\omega(i) - \hat{\omega}(i))^2 + \frac{w}{N} \sum_{i=1}^N (I(i) - \hat{I}(i))^2 \quad (5)$$

przy czym w jest współczynnikiem wagi, wyznaczanym eksperymentalnie. Zbliżone wyniki identyfikacji otrzyma się, jeśli na podstawie minimalizacji błędu średniokwadratowego prądu stojana wyznaczy się indukcyjność L_s i współczynnik wzbudzenia K_e , natomiast na podstawie minimalizacji błędu średniokwadratowego prędkości – moment bezwładności J . Rezystancję stojana wyznaczono poprzez bezpośredni pomiar ($R_s = 2,4 \Omega$ dla temperatury $20 \text{ }^\circ\text{C}$), ale w procesie identyfikacji parametr ten był także identyfikowany.

Zgodność trajektorii czasowych (dokładność aproksymacji) prędkości kątowej i prądu stojana silnika oraz jego modelu matematycznego oceniano za pomocą współczynników korelacji (6), odpowiednio prędkości kątowej R_ω i prądu stojana R_I (współczynnik R_I obliczano analogicznie jak R_ω) choć równie dużą skutecznością można przeprowadzić ocenę na podstawie wartości minimalizowanego wskaźnika jakości (5).

$$R_\omega = \frac{\sum_{i=1}^N (\omega(i) - \bar{\omega})(\hat{\omega}(i) - \bar{\omega})}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (\omega(i) - \bar{\omega})^2 \sum_{i=1}^N (\hat{\omega}(i) - \bar{\omega})^2}}, \quad \bar{\omega} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \omega(i) \quad (6)$$

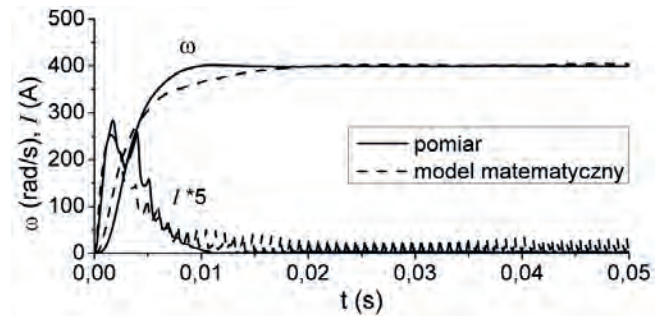
W celu identyfikacji parametrycznej modelu matematycznego (1)–(3) dokonano odpowiednich pomiarów wielkości fizycznych silnika obciążonego tylko momentem bezwładności wirnika, zasilanego skokową zmianą amplitudy Δv napięcia fazowego stojana. Napięcia fazowe mierzono przetwornikami typu LEM lub wyznaczano na podstawie sygnałów sterujących tranzystorami

oraz napięcia V_{DC} prostownika falownika. Wyniki identyfikacji parametrycznej przy wykorzystaniu wskaźnika (5), dla rozruchu silnika bez obciążenia i różnych wartości napięć stojana Δv , wynoszących odpowiednio 100 %, 75 % i 50 % wartości napięcia prostownika (amplituda napięć fazowych odpowiednio 285 V, 214 V i 143,5 V), przedstawia tab. 1 (symbolem Δ oznaczono skokową zmianę napięcia, K_e [Vs/rad]).

Pośrednie wyznaczanie napięć fazowych stojana na podstawie sygnałów sterujących tranzystorami zapewnia większą dokładność identyfikacji (większe wartości współczynników korelacji prędkości R_ω i prądu R_I). Wynika to stąd, że napięcia fazowe próbkowane z częstotliwością 40 kHz niezbyt dokładnie odwzorowują ich rzeczywisty kształt.

Uzyskane w procesie identyfikacji wartości parametrów modelu matematycznego na podstawie minimalizacji funkcji (5) nie stanowią rzeczywistych, fizycznych wartości parametrów silnika, a jedynie wartości współczynników, zapewniające minimum przyjętego wskaźnika jakości identyfikacji. Rozrzut wartości tych parametrów zależy od stromości (gradientu) wskaźnika (5) w otoczeniu ekstremum (dokładność wyznaczenia ekstremum), od zmiany właściwości statycznych i dynamicznych silnika oraz od błędu aproksymacji (gdy wartości R_ω i R_I są mniejsze od 1).

Porównanie przebiegów czasowych prędkości kątowej ω i amplitudy I wektora prądu stojana silnika nieobciążonego i jego modelu matematycznego, z parametrami uzyskanymi w procesie identyfikacji, dla skokowej zmiany napięcia Δv (wypełnienie impulsów 100 %), zamieszczono na rys. 2. Zmniejszenie liczby zidentyfikowanych parametrów (współczynnik $K_e = 0,885 \text{ V/rad/s}$ wyznaczono przez bezpośredni pomiar prędkości ω i SEM) pogarsza dokładność identyfikacji, tzn. poprawia wartość współczynnika korelacji prądu, ale pogarsza – wartość współczynnika korelacji prędkości.



Rys. 2. Porównanie przebiegów czasowych prędkości kątowej ω i amplitudy I prądu stojana nieobciążonego silnika i jego modelu matematycznego dla skokowej zmiany napięcia $\Delta v = 100 \%$
Fig. 2. Comparison of the time responses of the angular velocity ω and the amplitude I of the stator current of the motor without load and its mathematical model for a step change in voltage $\Delta v = 100 \%$

Tab. 1. Zestawienie wyników identyfikacji dla skokowych zmian napięcia stojana Δv

Tab. 1. List of identification results for step changes in the stator voltage Δv

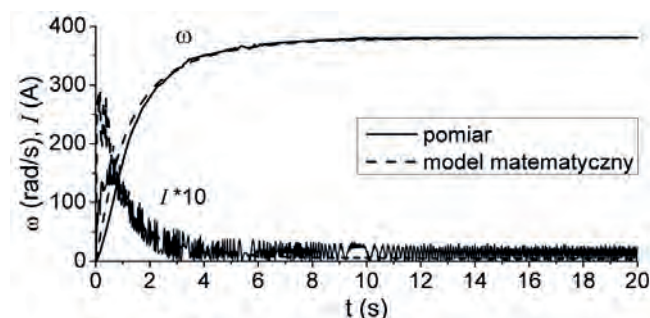
Napięcia	Δv [%]	L_s [H]	J [kgm ²]	K_e	R_s [Ω]	R_ω	R_I
Wyznaczane	100	$2,82 \cdot 10^{-3}$	$4,42 \cdot 10^{-4}$	0,767	6,82	0,984	0,798
Mierzone	100	$3,38 \cdot 10^{-3}$	$4,53 \cdot 10^{-4}$	0,784	6,08	0,953	0,778
Wyznaczane	75	$9,57 \cdot 10^{-3}$	$6,53 \cdot 10^{-4}$	0,820	5,18	0,979	0,951
Mierzone	75	$1,27 \cdot 10^{-2}$	$2,34 \cdot 10^{-4}$	0,608	8,85	0,983	0,731
Wyznaczane	50	$1,07 \cdot 10^{-1}$	$4,61 \cdot 10^{-4}$	0,701	21,0	0,994	0,478
Mierzone	50	$1,01 \cdot 10^{-1}$	$9,95 \cdot 10^{-4}$	0,523	17,4	0,995	0,424

5. Identyfikacja parametrów modelu matematycznego silnika obciążonego momentem bezwładności

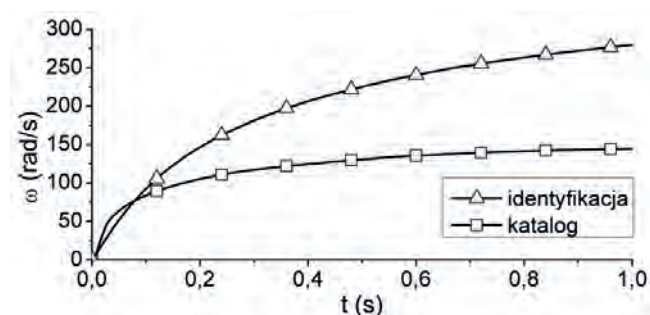
Moment bezwładności wirnika i dodatkowej masy wyznaczono na podstawie metody wybiegu ($J = 0,09514 \text{ kgm}^2$) oraz na podstawie objętości i gęstości materiału ($J = 0,096 \text{ kgm}^2$). Pomiary rozruchu silnika z dodatkową masą dokonano dla skokowego wymuszenia napięciem Δv stojana o wartości 100 %

Tab. 2. Wyniki identyfikacji przy obciążeniu silnika dodatkową masą
Tab. 2. Identification results with additional mass connected with the motor

Wypełnienie Δv [%]	L_s [H]	J [kgm ²]	K_e	R_s [Ω]	R_ω	R_I
100	$9,25 \cdot 10^{-3}$	0,0891	0,868	4,92	0,998	0,803
75	$7,23 \cdot 10^{-3}$	0,0946	0,955	19,2	0,902	0,755



Rys. 3. Weryfikacja procesu identyfikacji modelu (1)–(3) silnika obciążonego dodatkowym momentem bezwładności i $\Delta v = 100$ %
Fig. 3. Verification of the identification process of the model (1)–(3) of the motor loaded with an additional moment of inertia and $\Delta v = 100$ %



Rys. 4. Weryfikacja rozwiązań modeli matematycznych dla parametrów katalogowych oraz wyznaczonych w procesie identyfikacji
Fig. 4. Verification of mathematical model solutions for catalog physical parameters and those determined in the identification process

i 75 % wypełnienia. Parametry modelu matematycznego wyznaczano w oparciu o minimalizację funkcji (5), przy czym przyjęto współczynnik wagowy $w = 50$. Wyniki identyfikacji zamieszczono w tab. 2 (identyfikowano także współczynnik J). Przykład weryfikacji procesu identyfikacji modelu matematycznego silnika z dodatkowym momentem bezwładności przedstawia rys. 3.

Wartości identyfikowanych parametrów nie dają bezpośredniej informacji o dynamice, np. prędkości kątowej. Aby porównać właściwości statyczne i dynamiczne modeli matematycznych silnika BLDC z różnymi wartościami współczynników rozwiązano

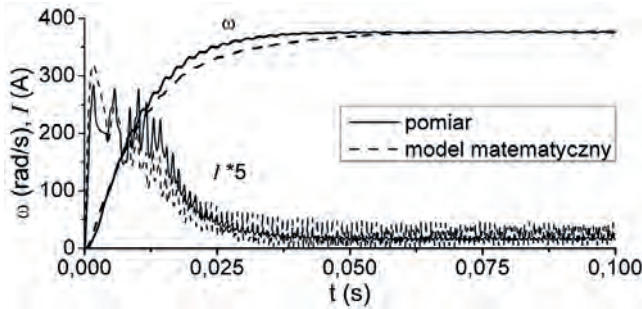
otrzymane modele matematyczne dla amplitudy napięcia stojana $\Delta v = 280 \text{ V}$ i momentu obciążenia $M_o = 0 \text{ Nm}$. Porównanie prędkości kątowych, stanowiących rozwiązanie modelu matematycznego (1)–(3), dla katalogowych wartości parametrów ($L_s = 0,013 \text{ H}$, $J = 0,0955 \text{ kgm}^2$, $R_s = 1,8 \text{ }\Omega$, $K_e = 1,05 \text{ V/rad/s}$, $K_t = 1,98 \text{ Nm/A}$) oraz otrzymanych z procesu identyfikacji (tab. 2: $L_s = 0,00925 \text{ H}$, $J = 0,0891 \text{ kgm}^2$, $R_s = 4,92 \text{ }\Omega$, $K_e = K_t = 0,968 \text{ V/rad/s}$) zamieszczono na rys. 4. W tym przypadku widoczne są różnice w dynamice modeli matematycznych, co może oznaczać, że wartości katalogowe parametrów silnika nie są dokładne (współczynnik korelacji procesu identyfikacji $R_\omega = 0,998$). Również dla innych przypadków zasilania i obciążenia nie uzyskano zgodności zarejestrowanych przebiegów prędkości kątowej z rozwiązaniami modelu matematycznego dla danych katalogowych.

6. Identyfikacja parametrów modelu matematycznego silnika obciążonego pompą

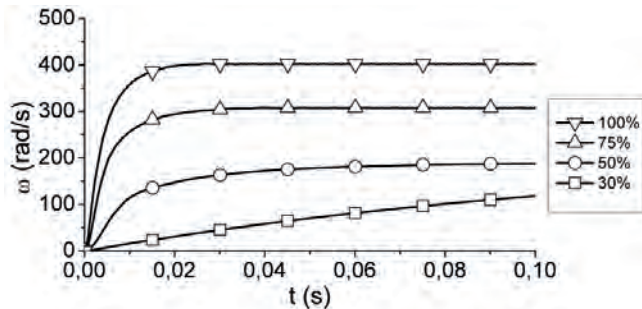
Identyfikację przeprowadzono dla identycznych warunków zasilania stojana, ale przy obciążeniu momentem M_o w zakresie 0–3 Nm, proporcjonalnym do prędkości silnika, generowanym przez pompę hydrauliczną. Wyniki identyfikacji dla amplitudy Δv napięcia stojana o wartości 100 %, 75 %, 50 % i 30 % wypełnienia impulsów zestawiono w tab. 3. Również i w tym przypadku uzyskane w procesie identyfikacji wartości współczynników nieliniowego modelu matematycznego silnika znacznie różnią się względem siebie, co dla modelu nieliniowego niekoniecznie musi oznaczać różne jego właściwości statyczne i dynamiczne. Przykład weryfikacji procesu identyfikacji dla $\Delta v = 100$ % wypełnienia impulsów ilustruje rys. 5.

Tab. 3. Zestawienie wyników identyfikacji dla silnika obciążonego pompą dla różnych wymuszeń napięcia
Tab. 3. Summary of identification results for a motor loaded with a pump for various voltage excitations

Δv [%]	L_s [H]	J [kgm ²]	K_e	R_s [Ω]	R_ω	R_I
100	$2,08 \cdot 10^{-3}$	0,000882	0,765	4,069	0,978	0,895
75	$4,15 \cdot 10^{-3}$	0,001741	1,000	3,828	0,956	0,911
50	$1,936 \cdot 10^{-2}$	0,004445	1,636	7,681	0,951	0,901
30	$5,721 \cdot 10^{-2}$	0,005375	1,306	66,55	0,999	0,360



Rys. 5. Weryfikacja procesu identyfikacji dla silnika obciążonego pompą przy pobudzeniu napięciem $\Delta v = 100\%$
 Fig. 5. Verification of the identification process for the motor loaded with a pump and excited by voltage $\Delta v = 100\%$



Rys. 6. Porównanie rozwiązań modelu matematycznego silnika dla danych z tab. 3
 Fig. 6. Comparison of solutions of the mathematical model of the motor for the data from tab. 3

Celem porównania właściwości modelu matematycznego (1)–(3) z parametrami zamieszczonymi w tab. 3, rozwiązano go dla amplitudy napięcia stojana $\Delta v = 280\text{ V}$ i momentu obciążenia $M_o = 0\text{ Nm}$. Porównanie rozwiązań zamieszczono na rys. 6. Zmiana charakteru przebiegu prędkości kątowej jest szczególnie zauważalna dla małych wartości napięć Δv . Jest to głównie wynikiem wpływu napięcia zasilania na właściwości silnika, ale także błędów identyfikacji.

7. Identyfikacja liniowego modelu matematycznego silnika BLDC

W uproszczonym, liniowym modelu matematycznym (4) typu wejście-wyjście układu napędowego z silnikiem BLDC sygnałem pobudzającym jest amplituda napięcia zasilania stojana v , natomiast sygnałem wyjściowym prędkość kątowa ω . Eksperymenty identyfikacyjne przeprowadzono przy zerowej i niezerowej prędkości początkowej silnika nieobciążonego, obciążonego dodatkowym momentem bezwładności oraz pompą hydrauliczną.

Wyniki identyfikacji liniowego modelu matematycznego silnika nieobciążonego, dla amplitudy napięcia Δv równej 100%, 75% i 50% wypełnienia impulsów, na podstawie minimalizacji

Tab. 4. Wyniki identyfikacji liniowego modelu (4) silnika nieobciążonego

Tab 4. Results of identifying the linear model (4) of the motor without load

Δv [%]	T [s]	ξ	K [rad/sV]	R_ω
100	$1,87 \cdot 10^{-3}$	0,790	1,397	0,998
75	$1,56 \cdot 10^{-3}$	1,446	1,673	0,971
50	$8,30 \cdot 10^{-4}$	15,11	2,344	0,992

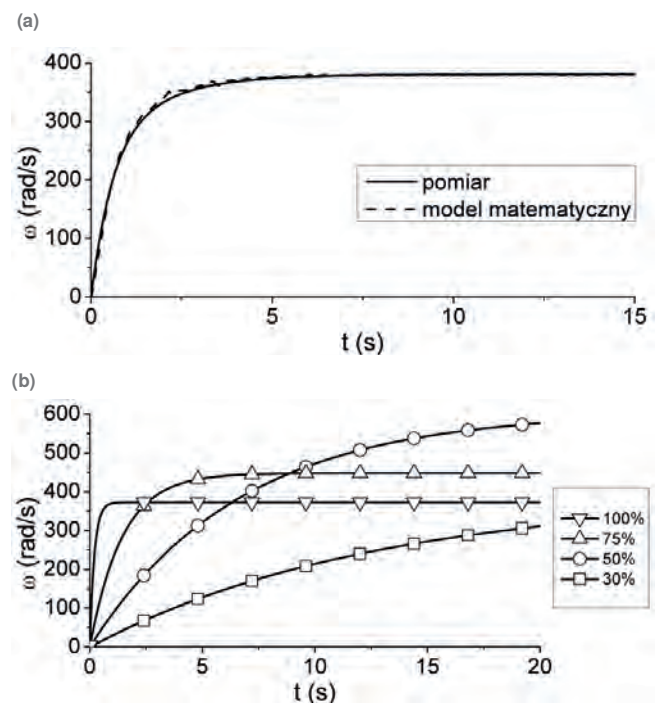
błędu średniokwadratowego prędkości kątowej (pierwszy składnik wskaźnika jakości (5)), zamieszczono w tab. 4

Zastosowanie modelu drugiego rzędu zapewnia dość dobrą aproksymację zarejestrowanej prędkości kątowej silnika (współczynnik korelacji R_ω powyżej 0,95). Dokładniejszą identyfikację otrzymano w przypadku silnika obciążonego dodatkową masą bezwładności (tab. 5).

Tab. 5. Wyniki identyfikacji modelu (4) silnika z dodatkową masą bezwładności

Tab. 5. Results of identification of the motor model (4) with additional inertia mass

Δv [%]	T [s]	ξ	K [rad/sV]	R_ω
100	$1,68 \cdot 10^{-2}$	6,06	1,333	0,998
75	$3,27 \cdot 10^{-1}$	4,65	1,621	0,960
50	$1,35 \cdot 10^{-1}$	24,62	2,166	0,996
30	$4,16 \cdot 10^{-1}$	15,12	2,394	0,999



Rys. 7. Weryfikacja procesu identyfikacji liniowego modelu matematycznego silnika obciążonego dodatkową masą dla $\Delta v = 100\%$ (a) oraz porównanie rozwiązań tego modelu dla danych z tab. 5 i wymuszenia $\Delta v = 280\text{ V}$ (b)

Fig. 7. Verification of the process of identifying the linear mathematical model of the motor loaded with additional mass for $\Delta v = 100\%$ (a) and comparison of the solutions of this model for the data in Tab. 5 and excitation of $\Delta v = 280\text{ V}$ (b)

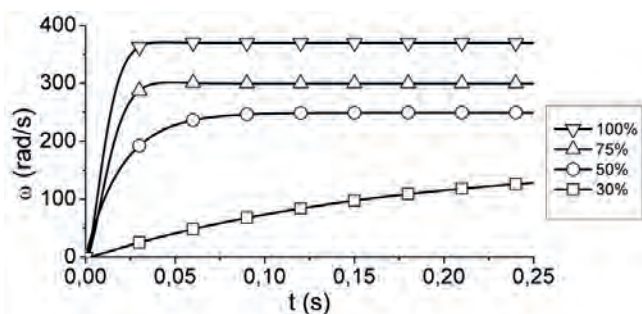
Weryfikację procesu identyfikacji modelu matematycznego (4) dla zasilania silnika napięciem stojana $\Delta v = 100\%$ zamieszczono na rys. 7a, natomiast rys. 7b przedstawia porównanie rozwiązań modelu liniowego dla wartości parametrów zamieszczonych w tab. 5. Liniowy model rozwiązano również dla sygnału wejściowego $\Delta v = 280\text{ V}$. W tym przypadku amplituda napięcia stojana ma silny wpływ zarówno na właściwości statyczne i dynamiczne przebiegów prędkości kątowej silnika.

Wyniki eksperymentów identyfikacyjnych, w których obciążenie silnika stanowiła pompa tłoczkowa wraz z układem hydraulicznym (moment obciążenia proporcjonalny do prędkości i dla jej wartości znamionowej również przyjmuje wartość znamionową, czyli $M_o = 100\%$), zestawiono w tab. 6. Również dla

Tab. 6. Wyniki identyfikacji liniowego modelu (4) silnika obciążonego pompą ($M_o = 100\%$)

Tab. 6. Results of the identification of the linear model (4) of the motor loaded with a pump ($M_o = 100\%$)

Δv [%]	T [s]	ξ	K [rad/sV]	R_ω
100	$6,62 \cdot 10^{-3}$	0,874	1,326	0,998
75	$3,84 \cdot 10^{-3}$	0,855	1,063	1,000
50	$5,29 \cdot 10^{-4}$	19,32	0,893	0,964
30	$2,25 \cdot 10^{-2}$	3,73	0,593	0,999



Rys. 8. Porównanie rozwiązań liniowego modelu matematycznego dla danych z tab. 6 i wymuszenia $\Delta v = 280$ V

Fig. 8. Comparison of the solutions of the linear mathematical model for the data from tab. 6 and forcing $\Delta v = 280$ V

tego typu obciążenia silnika otrzymano zbieżne przebiegi mierzonej prędkości kątowej silnika i jego modelu matematycznego ($R_\omega \approx 1$).

Rysunek 8 ilustruje porównanie rozwiązań modelu matematycznego (4), dla wartości parametrów zamieszczonych w tab. 6 i napięcia $\Delta v = 280$ [V]. Wpływ amplitudy napięcia stojana na właściwości statyczne i dynamiczne modeli matematycznych jest zbliżony do omówionych powyżej.

Analizowano również problem identyfikacji modelu liniowego przy niezerowych początkowych prędkościach kątowych silnika.

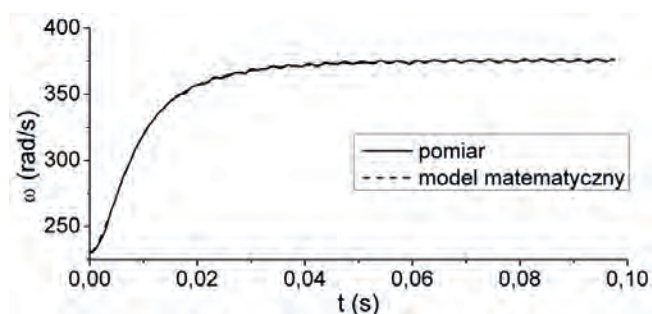
Eksperymenty identyfikacyjne przeprowadzono dla silnika obciążonego pompą. W tabeli 7 zamieszczono wyniki identyfikacji, dla skokowej zmiany wartości pobudzającego napięcia zasilania stojana $\Delta v = 25\%$, przy czym napięcie v_o przed wprowadzeniem tego pobudzenia wynosiło odpowiednio 75%, 50% i 25% połowy napięcia prostownika falownika (ustalona prędkość początkowa ω_o wynosiła odpowiednio 230 rad/s, 157 rad/s oraz 44 rad/s).

Wyniki identyfikacji zamieszczone w tab. 7, jak i odpowiedzi skokowe prędkości kątowej silnika i jego modelu matematycznego (rys. 9), potwierdzają dokładne odwzorowanie przebiegów czasowych (wartość R_ω bliska 1).

Tab. 7. Wyniki identyfikacji modelu liniowego silnika obciążonego pompą, przy niezerowych warunkach początkowych prędkości

Tab. 7. Results of identifying the linear model of the motor loaded with a pump, with non-zero initial speed conditions

Δv [%]	T [s]	ξ	K [rad/sV]	R_ω
75+25	$4,22 \cdot 10^{-3}$	1,269	1,316	1,000
50+25	$4,18 \cdot 10^{-3}$	0,961	1,070	0,999
25+25	$1,29 \cdot 10^{-3}$	16,77	1,087	0,995



Rys. 9. Weryfikacja procesu identyfikacji liniowego modelu matematycznego silnika obciążonego pompą dla napięcia $v = 75+25\%$

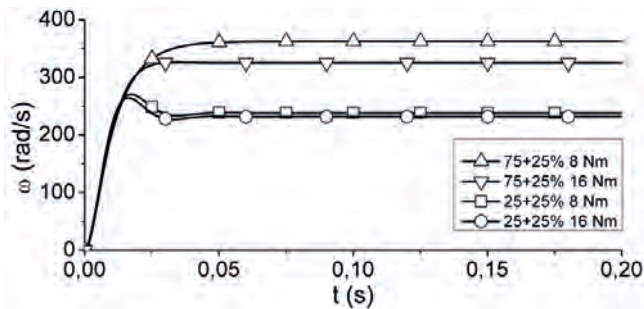
Fig. 9. Verification of the process of identifying the linear mathematical model of the motor loaded with a pump for voltage $v = 75+25\%$

Tab. 8. Wyniki identyfikacji liniowego modelu silnika obciążonego zmiennym momentem M_o , dla niezerowych wartości początkowej prędkości ω_o

Tab. 8. Results of identification of the linear model of the motor loaded with variable torque M_o , for non-zero values of the initial speed ω_o

$v = v_o + \Delta v$ [%]	M_o [Nm]	ω_o [rad/s]	T [s]	ξ	K [rad/sV]	R_ω
75+25	4	342,2	$4,74 \cdot 10^{-3}$	1,280	1,326	0,999
	8	335,1	$4,77 \cdot 10^{-3}$	1,200	1,295	0,999
	12	319,4	$5,13 \cdot 10^{-3}$	0,999	1,218	0,999
	16	306,3	$5,16 \cdot 10^{-3}$	0,885	1,161	0,980
50+25	4	234,3	$4,50 \cdot 10^{-3}$	1,000	1,400	0,998
	8	217,8	$4,78 \cdot 10^{-3}$	0,840	1,302	0,991
	12	207,8	$4,77 \cdot 10^{-3}$	0,783	1,216	0,982
	16	201,5	$4,72 \cdot 10^{-3}$	0,740	1,194	0,976
25+25	4	99,0	$4,75 \cdot 10^{-3}$	0,555	0,963	0,988
	8	82,4	$4,66 \cdot 10^{-3}$	0,535	0,850	0,975
	12	78,2	$4,75 \cdot 10^{-3}$	0,520	0,835	0,972
	16	72,0	$4,42 \cdot 10^{-3}$	0,529	0,827	0,958

Eksperymenty identyfikacyjne przeprowadzono także dla niezerowych warunków początkowych prędkości kątowej i różnego obciążenia silnika momentem M_o . Zmianę momentu obciążenia na wale silnika realizowano przez odpowiednie wysterowanie napięcia cewki elektrohydraulicznego zaworu proporcjonalnego. Wartości tego napięcia dobrano tak, aby uzyskać w stanie ustalonym prędkości obciążenia 50 %, 100 %, 150 % i 200 % momentu znamionowego silnika ($M_N = 7,8 \text{ Nm}$). Napięcie zasilania silnika zmieniano o $\Delta v = 25 \%$, przy początkowych wartościach napięcia v_o , wynoszących: 75 %, 50 % i 25 %. Wyniki identyfikacji zamieszczono w tab. 8.



Rys. 10. Porównanie rozwiązań modelu matematycznego (4) dla danych z tab. 8 i momentu obciążenia 8 Nm i 16 Nm
Fig. 10. Comparison of the solutions of the mathematical model (4) for the data from tab. 8 and the load moment of 8 Nm and 16 Nm

Porównanie rozwiązań modelu liniowego (4) dla danych z tab. 8 i dla $\Delta v = 280 \text{ V}$ zamieszczono na rys. 10. Również w tym przypadku na właściwości statyczne i dynamiczne silnika (także jego modelu matematycznego) ma wpływ napięcie zasilania stojana, w mniejszym stopniu obciążenie momentem. Ten sposób eksperymentu identyfikacyjnego praktycznie uzależnia identyfikowane parametry tylko od napięcia zasilania silnika.

Proces identyfikacji parametrów analizowanych modeli matematycznych silników można znacząco uprościć, dokonując pomiarów i przetwarzania sygnałów w układzie regulacji, np. prędkości kątowej. Wówczas dla danych parametrów regulatora nie ma konieczności pomiaru napięć stojana, a tylko sygnału wejściowego układu regulacji.

8. Podsumowanie

Zaletą zaproponowanej metody identyfikacji jest możliwość wyznaczania zmiany wartości identyfikowanych parametrów, wskutek zmiennych warunków obciążenia i zasilania silnika. Na podstawie przeprowadzonych badań laboratoryjnych stwierdzono, że wartości wyznaczanych parametrów modeli matematycznych istotnie zależą od warunków zasilania i obciążenia silnika, ale także od zastosowanego eksperymentu identyfikacyjnego. Identyfikacji parametrów modelu matematycznego nie można więc dokonać na podstawie pojedynczego, lecz na podstawie odpowiednio zaplanowanej serii eksperymentów. Model matematyczny silnika powinien odzwierciedlać jego właściwości statyczne i dynamiczne w całym zakresie warunków eksploatacji.

W przypadku silnika BLDC otrzymano zadowalające wyniki zastosowania liniowego modelu matematycznego do opisu jego właściwości statycznych i dynamicznych, w różnych warunkach eksploatacji silnika. Jednakże brak możliwości uwzględnienia momentu bezwładności lub obciążenia w strukturze liniowego równania typu wejście-wyjście skutkuje uzależnieniem wartości

jego współczynników od tych wielkości fizycznych. W przypadku projektowania układu regulacji może być niezbędna aproksymacja zmian wartości identyfikowanych współczynników w funkcji napięcia (prędkości kątowej), momentu bezwładności i obciążenia, np. za pomocą funkcji wielomianowych.

Uzyskane wartości parametrów modelu matematycznego na podstawie minimalizacji błędu średniokwadratowego aproksymacji nie są wartościami rzeczywistych parametrów silnika, a jedynie wartościami współczynników, które zapewniają minimum przyjętego wskaźnika jakości identyfikacji. Metoda ta daje więc dokładny opis właściwości statycznych i dynamicznych silnika dla różnych warunków zasilania i obciążenia, lecz nie nadaje się do wyznaczania poszczególnych parametrów konstrukcyjnych silnika.

Bibliografia

1. Boldea I, Nasar S.A, Electric Drives. CRC Press LLC, 1999
2. Cavagnino A., Lazzari M., Profumo F., Tenconi A., *Axial Flux Interior PM Synchronous Motor: Parameter Identification and Steady-State Performance Measurements*. "IEEE Transactions on Industry Applications", Vol. 36, No. 6, 2000, 1581–1588, DOI: 10.1109/28.887209.
3. Hanselman D., *Brushless Permanent Magnet Motor Design*. Magna Physics Publishing, USA, 2006.
4. Hillenbrand F., Riedel M., *BLDC-motor production process surveillance based on parameter identification method*. 6th International Electric Drives Production Conference (EDPC), 2016, 86–91, DOI: 10.1109/EDPC.2016.7851319.
5. Kumpanya D., Thaiparnat S., Puangdownreong D., *Parameter identification of BLDC motor model via metaheuristic optimization techniques*, "Procedia Manufacturing", Vol. 4, 2015, 322–327, DOI: 10.1016/j.promfg.2015.11.047.
6. Stefański T., Zawarczyński Ł., *Identyfikacja parametryczna modelu matematycznego silnika bezszczotkowego prądu stałego*. „Pomiary Automatyka Kontrola”, R. 57, Nr 1, 2011, 109–113.
7. Wu J., *Parameters estimation of BLDC motor for energy storage system*. Proceedings of the 10th World Congress on Intelligent Control and Automation, 2012, 4190–4194, DOI: 10.1109/WCICA.2012.6359180.
8. Xiang C., Wang X., Ma Y., Xu B., *Practical Modeling and Comprehensive System Identification of a BLDC Motor*, Hindawi Publishing Corporation "Mathematical Problems in Engineering", Vol. 2015, DOI: 10.1155/2015/879581.

Parametric Identification of Nonlinear and Linear Mathematical Models of the BLDC Motor

Abstract: The article presents the results of an analysis of the parametric identification process of typical mathematical models of a brushless DC motor with an electronic commutator (BLDC) in off-line conditions. The aim of the analysis was to examine the impact of changes in motor load and power supply conditions on the obtained parameter values of mathematical models. The experiments used a nonlinear and linear mathematical model of the BLDC motor drive system in the form of a system of differential equations of individual phases of the BLDC motor electric circuit and a differential equation of the input variable in the form of supply voltage and the output variable in the form of angular velocity, respectively. The identified parameters of the mathematical models were determined on the basis of electrical and mechanical measurements of the motors's output values when excited with various stator voltage values (in relative units). The Nelder-Mead numerical static optimization method was used to identify the nonlinear and linear mathematical model of the motor. The identified model parameters were determined for various operating conditions of the drive system with an inertial mass load and a hydraulic pump operating in a power drive system with a proportional valve. The motor load torque in the hydraulic system was obtained by using the throttling method by changing the pressure and flow parameters of the working medium. The influence of supply voltage and load torque on the static and dynamic properties of the motor was also analysed. The assessment of the convergence of the time responses of the drive system recorded in experiments and obtained from the solution of mathematical models was carried out on the basis of the correlation function. Laboratory tests were carried out in a drive system with motor BLDC of power 2.5 kW operating in a drive system with a piston pump.

Keywords: BLDC motor, parametric identification, mathematical model, linear model, nonlinear model

dr inż. Łukasz Zawarczyński

l.zawarczyński@tu.kielce.pl

ORCID:0000-0003-1899-2389

Od 2008 r. pracuje na Politechnice Świętokrzyskiej na Wydziale Elektrotechniki, Automatyki i Informatyki w Katedrze Informatyki Stosowanej. W 2021 r. uzyskał stopień naukowy doktora w dyscyplinie Automatyka, Elektronika i Elektrotechnika. Jego obszar badawczy jest ściśle związany z projektowaniem systemów sterowania i zarządzania elementami wykonawczymi w postaci układów napędowych. Rezultaty licznych prac badawczych obejmujących zagadnienia sterowania i identyfikacji prezentował na konferencjach międzynarodowych i branżowych. Pełni funkcję Prezesa Koła SEP na Politechnice Świętokrzyskiej.

