

Porównanie metod sterowania adaptacyjnego dla stołu balansującego kulą

Marcin Mateusz Czajka, Daria Kubacka, Jacek Michalski, Robert Bączyk, Piotr Kozierski
Politechnika Poznańska, Wydział Automatyki Robotyki i Elektrotechniki, ul. Piotrowo 3a, 60-965 Poznań

Streszczenie: Celem artykułu jest przedstawienie i porównanie działania dwóch algorytmów sterowania adaptacyjnego: z identyfikacją parametrów modelu MIAC (Model Identification Adaptive Control) oraz z modelem odniesienia MRAC (Model Reference Adaptive Control). Zaproponowano modyfikacje, które w szczególnych przypadkach mogą poprawić jakość regulacji. Wykorzystano stanowisko laboratoryjne stołu balansującego kulą BBT (ball balancing table), które jest przykładem systemu „kula na blacie”. Problematyka balansowania takiego systemu może mieć istotne znaczenie w kontekście prac nad stabilizacją łodzi lub drona. W artykule przedstawiono nieliniowy model obiektu oraz jego liniowe przybliżenie w otoczeniu punktu pracy, a także opisano proces identyfikacji parametrów z użyciem rekursywnej metody najmniejszych kwadratów RLS (Recursive Least Square). W ramach analizy porównawczej dokonano oceny zastosowanych algorytmów regulacji, MIAC i MRAC, podczas stanów przejściowych oraz w stanie ustalonym. W celu analizy porównawczej wykorzystano wskaźniki jakości, takie jak koszt sterowania i całkowity wskaźnik z wartości bezwzględnej uchybu. W wynikach badań pokazano możliwości zarówno pośredniej, jak i bezpośredniej adaptacji nastaw regulatora, w zależności od wykorzystanej metody. Zostały wykazane zalety porównywanych algorytmów oraz ich modyfikacje pozwalające poprawić działanie układu w szczególnych przypadkach. Zastosowane metody adaptacyjne pozwoliły uodpornić układ na błędy modelowania (brak znajomości parametrów) czy inne wewnętrzne zaburzenia.

Słowa kluczowe: sterowanie adaptacyjne, MRAC, MIAC, stół balansujący kulą, RLS

1. Wprowadzenie

W znacznej większości rzeczywistych układów regulacji automatycznej stosowane są regulatory PID [1–3], które zwykle zapewniają akceptowalną jakość regulacji. Istnieje wiele metod doboru nastaw regulatora, a niektóre wymagają dokładnej znajomości modelu, zaś przeprowadzana w tym celu identyfikacja może być kosztowna obliczeniowo i czasochłonna [4]. Trzeba pamiętać, że wszystkie modele matematyczne są obciążone pewnymi błędami wiążącymi się z przyjęciem niewystarczająco elastycznej struktury bądź złym dopasowaniem wartości parametrów. Aby ułatwić tworzenie modelu przyjmuje się założenia upraszczające, np. linearyzację nieliniowych części modelu w otoczeniu punktu pracy [5]. Również sam proces modelowania ma pewne ograniczenia, które mogą prowadzić do otrzymania modelu, który nie odwzorowuje rzeczy-

wistego obiektu. Ograniczenia te mogą być związane z brakiem znajomości dokładnych wartości wielkości fizycznych (masy, momentu bezwładności czy współczynnika tarcia wiskotycznego [6]). Ponadto trudnością może być matematyczny opis zjawisk fizycznych lub chemicznych związanych z danym procesem. Przykładem takiego procesu jest mieszanie się gazów w warunkach złożowych [7].

Przy wykorzystaniu konwencjonalnego regulatora PID dla obiektu nieliniowego, układ byłby dobrze sterowany tylko w otoczeniu punktu pracy, dla którego powstał model liniowy. W przypadku niedokładności modelowania lub zmienności w czasie parametrów, można wykorzystać sterowanie adaptacyjne. Wpływ różnic występujących między modelem a obiektem rzeczywistym jest niwelowany dzięki ciągłej adaptacji parametrów regulatora. Różnice te mogą wynikać, np. ze zmiany obciążenia podczas podniesienia przedmiotu przez ramię manipulatora [8] lub z oblodzenia drona [9]. W przypadku sterowania adaptacyjnego z identyfikacją modelu, możliwa jest również kompensacja zjawiska *windup* [10].

Algorytm sterowania adaptacyjnego z modelem referencyjnym jest znany od lat 50. XX wieku, kiedy próbowano utworzyć z jego pomocą system sterowania lotem dla samolotów [11–14]. Około 10 lat później została zaproponowana modyfikacja wykorzystująca stabilność Lapunowa, aby niepoprawny dobór współczynników nie prowadził do utraty stabilności układu zamkniętego [15, 16]. Na przełomie XX i XXI wieku

Autor korespondujący:

Marcin Mateusz Czajka, czajka.m.marcin@gmail.com

Artykuł recenzowany

nadesłany 17.07.2023 r., przyjęty do druku 27.12.2023 r.



Zezwala się na korzystanie z artykułu na warunkach licencji Creative Commons Uznanie autorstwa 3.0

zaproponowano wykorzystanie sieci neuronowych w tej metodzie sterowania [17, 18].

Podczas przygotowania artykułu wykorzystano stanowisko BBT [19]. Inna przykładowa konstrukcja systemu typu „kula na blacie” została przedstawiona w [20]. Badane na takich stanowiskach zjawiska balansowania jest wykorzystywane m.in. przy projektowaniu algorytmów kompensacji fal na okrętach morskich [21], jak i w systemach bezpiecznego lądowania dronów [22]. Pozwalają one na testowanie różnych metod sterowania, m.in. z wykorzystaniem sprzężenia od stanu [23], różnych wariantów MRAC [24] lub algorytmu sterowania predykcyjnego MPC (ang. *Model Predictive Control*) [25]. Ponadto, w [26] pokazano, jak klasyczny regulator PID został zastąpiony regulatorem Fuzzy–PID opartym na filtrze Kalmana, który przyczynił się do redukcji zakłóceń pochodzących z czujników.

W pracy zostały szczegółowo porównane dwa algorytmy adaptacyjnej regulacji dla obiektu BBT. Przedstawiono prawa sterowania oraz adaptacji dla metod MIAC oraz MRAC, wraz z propozycjami ich modyfikacji mogącymi poprawić jakość działania układu. Według najlepszej wiedzy autorów jest to pierwsza praca z kompleksową analizą porównawczą przedstawionych metod i ich modyfikacji. W sekcji 2 omówione zostały wykorzystane algorytmy regulacji. Opis obiektu wraz z warunkami oraz wynikami eksperymentów przedstawiono w sekcji 3. Podsumowanie znajduje się w sekcji 4.

2. Algorytmy regulacji

2.1. Regulacja PID

W konwencjonalnych układach regulacji, zwłaszcza w zastosowaniach przemysłowych, popularne jest stosowanie regulatora PID. Sygnał sterujący u jest sumą trzech składowych pochodzących z torów regulacji: proporcjonalnego, całkującego i różniczkowego. Transmittancję regulatora $G_r(s)$ można przedstawić wzorem [1]

$$G_r(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s, \quad (1)$$

gdzie $U(s)$ i $E(s)$ to transformaty Laplace’a sygnału sterującego $u(t)$ i uchybu regulacji $e(t)$, a k_p , k_i i k_d są kolejno wzmocnieniami członów proporcjonalnego, całkującego i różniczkującego. Należy zauważyć, że idealne różniczkowanie w transmittancji regulatora PID (1) nie jest realizowalne fizycznie. W praktyce stosuje się dodatkowo filtrację inercyjną sygnału uchybu w torze różniczkującym.

Transmittancję operatorową układu zamkniętego $G_z(s)$ z regulatorem o transmittancji $G_r(s)$ oraz obiektem o transmittancji $G(s)$ opisuje równanie

$$G_z(s) = \frac{Y(s)}{Y_r(s)} = \frac{G_r(s)G(s)}{1 + G_r(s)G(s)}, \quad (2)$$

w którym $Y(s)$ oraz $Y_r(s)$ to transformaty Laplace’a, odpowiednio, sygnału wyjściowego obiektu oraz sygnału referencyjnego. Wielomian charakterystyczny $M(s)$ można wyznaczyć przez uporządkowanie równania

$$1 + G_r(s)G(s) = 0. \quad (3)$$

Jednym ze sposobów syntezy nastaw regulatora jest metoda lokowania biegunów [1], która została wykorzystana w dalszych rozważaniach. Zgodnie z tą metodą należy przyrównać współczynniki powstałego wielomianu charakterystycznego

dla układu zamkniętego (3) z pewnym wielomianem zadany $M_d(s)$ wybranym przez projektanta

$$M_d(s) = (s + \omega)^n. \quad (4)$$

Ze względu na ograniczenia wynikające z modelu obiektu oraz algorytmu PID, nie zawsze istnieje możliwość ułożenia wszystkich biegunów. Może istnieć potrzeba przyjęcia pewnych założeń upraszczających, jak np. pomijanie biegunów niedominujących, czy aproksymacja modelem niższego rzędu [27].

2.2. Sterowanie adaptacyjne z identyfikacją parametrów

Sterowanie metodą lokowania biegunów opisane w części 2.1. wymaga dokładnej znajomości modelu obiektu. W przypadku braku takich informacji, możliwa jest również identyfikacja parametrów modelu równoległe z regulacją i aktualizacją nastaw regulatora na jej podstawie. W tej pracy autorzy wykorzystali rekursywną metodę najmniejszych kwadratów – RLS. Do jej opisu służą następujące równania [4]

$$\mathbf{P}(i) = \mathbf{P}(i-1) - \frac{\mathbf{P}(i-1)\boldsymbol{\varphi}(i)\boldsymbol{\varphi}^T(i)\mathbf{P}(i-1)}{1 + \boldsymbol{\varphi}^T(i)\mathbf{P}(i-1)\boldsymbol{\varphi}(i)}, \quad (5)$$

$$\mathbf{k}(i) = \mathbf{P}(i)\boldsymbol{\varphi}(i), \quad (6)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(i) = y^{(n)}(i) - \boldsymbol{\varphi}^T(i)\hat{\mathbf{p}}(i-1), \quad (7)$$

$$\hat{\mathbf{p}}(i) = \hat{\mathbf{p}}(i-1) + \mathbf{k}(i)\boldsymbol{\varepsilon}(i), \quad (8)$$

gdzie $\mathbf{P}(i)$ jest macierzą kowariancyjną estymat parametrów w i -tej iteracji, $\boldsymbol{\varphi}(i) = [-y^{(n-1)}(i) \dots -y(i) \ u^{(m)}(i) \dots u(i)]^T$ jest

wektorem regresji złożonym z próbek sygnału wyjściowego y i sterującego u oraz ich pochodnych, $y^{(j)}(i)$ oznacza próbkę j -tej pochodnej sygnału ciągłego z i -tego kroku dyskretnego, $\mathbf{k}(i)$ to wektor wzmocnienia korekcyjnego, $\boldsymbol{\varepsilon}(i)$ jest błędem równaniowym, $y^{(n)}(i)$ to n -ta pochodna sygnału wyjściowego,

a $\hat{\mathbf{p}}(i) = [a_{n-1}(i) \dots a_0(i) \ b_m(i) \dots b_0(i)]^T$ jest estymowanym wektorem parametrów.

Należy pamiętać, że wraz ze wzrostem numeru iteracji elementy macierzy kowariancyjnej \mathbf{P} dążą do $\mathbf{0}$, a estymator traci zdolność adaptacji parametrów $\hat{\mathbf{p}}$. Ten problem jest szczególnie istotny w przypadku obiektów o parametrach zmiennych w czasie. Jednym z rozwiązań może być resetowanie macierzy kowariancyjnej \mathbf{P} w przypadku spełnienia określonych warunków lub zastosowanie współczynnika zapominania $\lambda \in (0; 1)$ i modyfikacja równania (5) do postaci

$$\mathbf{P}(i) = \frac{1}{\lambda} \left[\mathbf{P}(i-1) - \frac{\mathbf{P}(i-1)\boldsymbol{\varphi}(i)\boldsymbol{\varphi}^T(i)\mathbf{P}(i-1)}{\lambda + \boldsymbol{\varphi}^T(i)\mathbf{P}(i-1)\boldsymbol{\varphi}(i)} \right]. \quad (9)$$

W każdej iteracji aktualizowane są estymaty parametrów obiektu regulacji $\hat{\mathbf{p}}(i)$. Oblicza się też wtedy nastawy regulatora, aby na podstawie wyznaczonych parametrów zapewniały wielomian charakterystyczny układu zgodny z zaprojektowanym wielomianem $M_d(s)$ (4).

W przypadku identyfikacji modelu czasu ciągłego, gdy nie ma możliwości pomiaru pochodnych sygnałów, można zasto-

sować filtr zmiennej stanu SVF (ang. *State Variable Filter*). Dostępne pomiarowo próbki przetwarzają się przy pomocy transmitancji

$$F(s) = \frac{s^j}{(sT_f + 1)^n}, \quad (10)$$

otrzymując odpowiednie pochodne rzędów $j = \{1, \dots, n\}$. Rząd filtru n nie może być niższy niż rząd dynamiki systemu, a dobór stałej czasowej T_f należy do projektanta. Zasady doboru stałej czasowej T_f i rozwiązania innych problemów związanych z identyfikacją modeli czasu ciągłego na podstawie próbkowanych danych przedstawiono w [28].

2.3. Sterowanie adaptacyjne z modelem odniesienia

W przypadku algorytmu MRAC, oprócz klasycznego sprzężenia zwrotnego, rozważana jest pętla, której zadaniem jest minimalizacja przyjętego wskaźnika jakości stanowiącego funkcję błędu między wyjściem pomiarowym $y(t)$ i odpowiedzią $y_m(t)$ modelu referencyjnego, który opisuje transmitancja

$$G_m(s) = \frac{Y_m(s)}{Y_r(s)}. \quad (11)$$

Prawo adaptacji dane jest równaniem [29]

$$\dot{\theta} = -\frac{\partial J}{\partial \theta}, \quad (12)$$

gdzie γ jest wektorem współczynników intensywności adaptacji, natomiast θ stanowi wektor parametrów regulatora. Dobór wartości γ zależy od decyzji projektanta i wymaga kompromisu między szybkością reakcji układu a wielkością przeregulowania. Dla zwiększenia przejrzystości zapisu jawna zależność od czasu nie jest zapisywana wprost.

W przypadku reguły MIT [29] (nazwa odnosi się do ośrodka Massachusetts Institute of Technology, w którym metoda została opracowana), funkcja celu J przyjmuje postać

$$J(\theta) = \frac{1}{2} \varepsilon_m^2, \quad (13)$$

gdzie ε_m oznacza błąd modelowania, wyznaczany z zależności

$$\varepsilon_m = y - y_m. \quad (14)$$

Podstawiając równanie (13) do (12) otrzymuje się prawo adaptacji dla reguły MIT

$$\dot{\theta} = -\gamma \varepsilon_m \frac{\partial \varepsilon_m}{\partial \theta}. \quad (15)$$

Stąd, podstawiając (14) do równania (15) i zakładając adaptacją pewnego nieznanego wzmocnienia k skalującego obiekt $G(s)$ o znanej transmitancji, otrzymuje się prawo adaptacji wzmocnienia regulatora

$$\dot{\theta} = -\gamma \varepsilon_m y_m. \quad (16)$$

W takim przypadku przyjmuje się sygnał sterujący dany równaniem [29]

$$u = \theta y_r. \quad (17)$$

Reguła MIT w klasycznej postaci, należąca do metod gradientowych, może doprowadzić do utraty stabilności układu, jeśli projektant nie uwzględni zewnętrznego zakłócenia, bądź założy stałość parametrów zmiennych w czasie. Kolejną przyczyną utraty stabilności może być ograniczenie wartości wzmocnienia γ , które zależy od poziomu sygnału referencyjnego [29]. Ograniczenie to może powodować trudności w jednoznacznym określeniu zakresu wartości, dla których układ jest stabilny. W celu uniknięcia destabilizacji przy dużych wartościach sygnału zadanego, można wykorzystać znormalizowaną wersję reguły MIT [30], dla której prawo adaptacji wyrażone jest równaniem

$$\dot{\theta} = \frac{-\gamma \varepsilon_m \frac{y}{\theta}}{\alpha_m + \left(\frac{y}{\theta}\right)^2}, \quad (18)$$

gdzie α_m zostało wprowadzone, aby uniknąć dzielenia przez bardzo małe wartości, gdy $\theta \gg y$.

Alternatywnym podejściem, pozwalającym na zapewnienie stabilności układu, jest zastosowanie metody Lapunowa, tzn. dobranie prawa sterowania w taki sposób, żeby pochodna proponowanej funkcji była ujemnie określona. Przykłady konstrukcji funkcji Lapunowa opisano w [16] oraz [31]. W przypadku drugiej z nich wykorzystano regulator PD (o dwóch stopniach swobody) z funkcją Lapunowa, dla którego sygnał sterujący u można przedstawić za pomocą wzoru

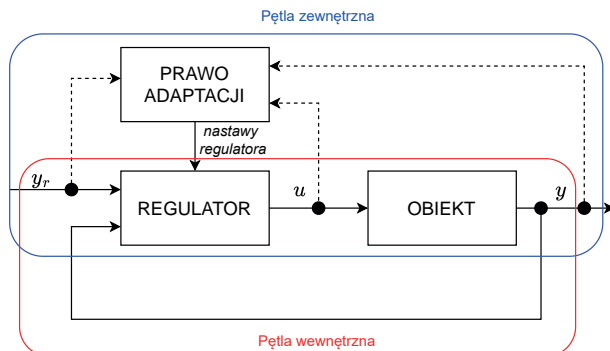
$$u = \theta_1 y_r - \theta_2 y - \theta_3 \dot{y}. \quad (19)$$

Dla błędu zdefiniowanego w równaniu (14), wykorzystanie funkcji Lapunowa daje prawo adaptacji (15) w postaci następujących równań [32]:

$$\frac{d\theta_1}{dt} = -\gamma y_r \varepsilon_m, \quad (20)$$

$$\frac{d\theta_2}{dt} = \gamma y \varepsilon_m, \quad (21)$$

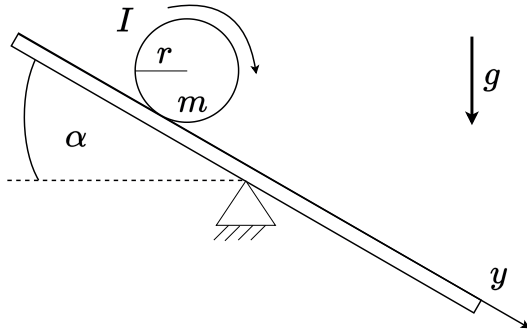
$$\frac{d\theta_3}{dt} = \gamma \dot{y} \varepsilon_m. \quad (22)$$



Rys. 1. Schemat ogólny sterowania adaptacyjnego
Fig. 1. General diagram of an adaptive control system

3. Eksperyment

Stanowisko BBT składa się z metalowej kulki, ekranu dotykowego i dwóch serwomechanizmów (uproszczony schemat przedstawiono na rys. 2). Stół jest podparty w centralnym punkcie, a serwomechanizmy są przymocowane do środków krawędzi. Taka konstrukcja daje dwa stopnie swobody ruchu (2 DoF).



Rys. 2. Schemat ideowy układu; uwzględniono ruch tylko w osi y
Fig. 2. Schematic diagram of the system; the limitation to the y axis only was assumed

Do sterowania stanowiskiem służy mikrokontroler Arduino, który w czasie rzeczywistym łączy się z uruchomionym na komputerze środowiskiem MATLAB/Simulink. Umożliwia to wyświetlanie w czasie rzeczywistym wykresów i zapisywanie w postaci wektorów wartości poszczególnych sygnałów występujących w układzie. Podczas każdego uruchamiania eksperymentu model w środowisku Simulink jest automatycznie kompilowany i wgrany na mikrokontroler Arduino, a ten ostatni jest odpowiedzialny za regulację położenia kulki.

3.1. Model matematyczny obiektu

Przy tworzeniu modelu matematycznego przyjęto następujące założenia:

- sygnałem wejściowym obiektu jest wartość kąta nachylenia ekranu α ,
- pominięto oddziaływanie siły tarcia,
- przyjęto, że metalowa kulka jest bryłą sztywną o kształcie idealnej kuli,
- rozpatrywany jest jedynie ruch wzdłuż stołu – osi y .

Mimo potencjalnych możliwości stanowiska laboratoryjnego, zrezygnowano z regulacji położenia w dwóch kierunkach (na płaszczyźnie). Ze względu na możliwość odsprężnienia układów regulujących położenie kulki uznano, że podejście jednowymiarowe jest wystarczające do celów analizy jakości regulacji wybranych algorytmów. Ponadto zmniejszenie wymaganej mocy obliczeniowej jest istotne w przypadku implementacji zaawansowanych metod sterowania na mikrokontrolerze o ograniczonych zasobach.

Na podstawie równań Lagrange'a można zapisać dynamikę metalowej kulki za pomocą wzoru [33]

$$\left(m + \frac{I}{r^2}\right)\ddot{y} - mg \sin \alpha = 0, \quad (23)$$

gdzie m oznacza masę kulki, r to promień kulki, I stanowi moment bezwładności kulki, g to przyspieszenie grawitacyjne, a α to kąt nachylenia osi y względem poziomu. Przy linearyzacji założono, że dla niewielkich wartości kąta α zachodzi $\sin \alpha \approx \alpha$, wówczas równanie (23) można przekształcić do postaci

$$\left(m + \frac{I}{r^2}\right)\ddot{y} = mg\alpha. \quad (24)$$

Na podstawie (24) utworzono model blatu G_{st} , dla którego wejściem jest kąt nachylenia blatu α , a wyjściem położenie kulki na osi y

$$G_{st}(s) = \frac{mg}{\left(m + \frac{I}{r^2}\right)s^2} = \frac{k_{st}}{s^2}. \quad (25)$$

Otrzymano model podwójnie całkujący o wzmacnieniu

$$k_{st} = \frac{mg}{m + \frac{I}{r^2}} = \frac{mgr^2}{mr^2 + I}.$$

Do opisu dynamiki pozycji kątowej orczyka serwomechanizmu można posłużyć się członem inercyjnym o jednostkowym wzmacnieniu wyrażonym jako

$$G_s(s) = \frac{1}{sT + 1}, \quad (26)$$

gdzie T jest stałą czasową serwomechanizmu.

W opisie matematycznym obiektu należy również uwzględnić wzmacnienie k_r , które jest stosunkiem długości ramienia serwomechanizmu r_m do odległości między punktem podparcia stołu, a jego brzegiem

$$k_r = \frac{r_m}{l_y}. \quad (27)$$

Transmitancję obiektu $G_{ob}(s)$ złożonego z serwomechanizmu, który zmienia kąt nachylenia stołu i toczącej się kulki można opisać wzorem

$$G_{ob}(s) = G_{st}(s)G_s(s)k_r = \frac{k_{st}k_r}{s^2(sT + 1)} = \frac{k}{s^2(sT + 1)}. \quad (28)$$

gdzie $k = k_{st}k_r$ oznacza wzmacnienie obiektu. Transmitancją układu zamkniętego (2), złożonego z obiektu oraz regulatora PD (równanie (1) dla $k_i = 0$), jest zatem

$$G_z(s) = \frac{kk_d s + kk_p}{Ts^3 + s^2 + kk_d s + kk_p}. \quad (29)$$

W procesie syntezy układu regulacji założono, że stała czasowa serwomechanizmu T ma pomijalnie małą wartość i tym samym można zredukować rząd modelu układu do drugiego. Przeprowadzone testy symulacyjne potwierdziły słuszność takiego uproszczenia na potrzeby syntezy układu regulacji, dlatego w dalszych eksperymentach przyjmowano model o zredukowanym rzędzie.

3.2. Warunki eksperymentu

Podczas eksperymentów jako sygnał referencyjny y , przyjęto sygnał prostokątny o okresie 16 s oraz amplitudzie 75 mm względem środka stołu. Położeniem początkowym była pozycja na skraju ekranu $y(0) = -150$ mm, a okres próbkowania wynosił $T_p = 0,01$ s.

Na brzegu stanowiska zamontowana jest banda, która ogranicza położenie kulki do zakresu ± 150 mm. Programowe ograniczenia sygnału sterującego pozwalają na wychylenia orczyka serwonapędu w zakresie od -45° do $+45^\circ$. W przypadku sterowania adaptacyjnego z ciągłą identyfikacją parametrów obiektu przyjęto na potrzeby zadania identyfikacji model o transmitancji danej wzorem

$$G_{id}(s) = \frac{b}{s^2(s+a)}, \quad (30)$$

który jest przekształconą formą równania (28). Parametry a i b estymowano za pomocą metody RLS z wykorzystaniem filtra SVF o stałej czasowej $T_f = 8T_p = 0,08$ s, a wektor regresji miał postać $\boldsymbol{\varphi} = [-\dot{y} \quad u]^T$.

Jako model odniesienia dla układu regulacji przyjęto człon oscylacyjny o transmitancji

$$G_{osc}(s) = \frac{k_{osc}\omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0s + \omega_0^2}, \quad (31)$$

gdzie k_{osc} oznacza wzmocnienie, ξ względny współczynnik tłumienia, natomiast ω_0 to pulsacja graniczna.

Wykorzystując podstawienie $k = b/a$ wynikające z przyrównania (30) i (28), dla $T \rightarrow 0$, wzory na parametry regulatora przyjmują postać:

$$k_p = \frac{a\omega_0}{b}, \quad (32)$$

$$k_d = \frac{2a\xi\omega_0}{b}. \quad (33)$$

3.3. Kryteria porównawcze rezultatów eksperymentów

Do zestawienia różnic między wynikami dla poszczególnych eksperymentów wykorzystano całkowity wskaźnik z wartości bezwzględnej uchybu I_{IAE} (ang. *Integral Absolute Error Index*) opisany wzorem

$$I_{IAE} = \int_{t_0}^{t_{end}} |e(t)| dt, \quad (34)$$

gdzie t_0 jest czasem rozpoczęcia eksperymentu, a t_{end} momentem jego zakończenia.

Drugim zastosowanym wskaźnikiem jest koszt sterowania J , który dany jest równaniem

$$J = \int_{t_0}^{t_{end}} u^2(t) dt. \quad (35)$$

W przypadku eksperymentów z wykorzystaniem algorytmu MIAC wskaźniki obliczono jedynie dla drugiego okresu sygnału zadanego, ponieważ zastosowano modyfikację, która w początkowej fazie eksperymentu bazowała na konwencjonalnym regulatorze PD. Natomiast dla metody MRAC realizowano pomiary od początku pierwszego okresu sygnału referencyjnego do końca jego drugiego okresu.

3.4. Wyniki eksperymentu

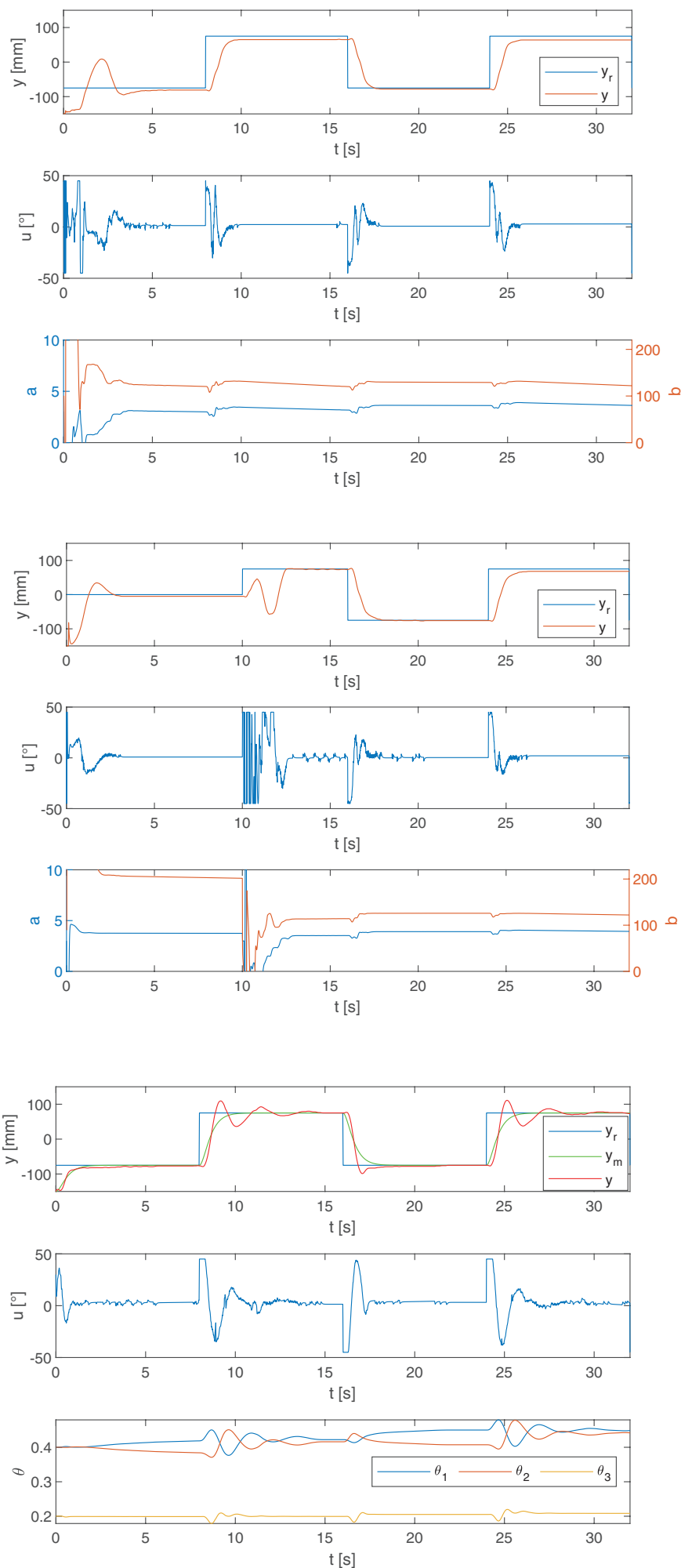
Na stanowisku BBT przeprowadzono serię eksperymentów mających na celu odtwarzanie przez pozycję kulki prostokątnego sygnału zadanego. Otrzymane wyniki przedstawiono w tabeli 1 oraz na rysunkach 3–7. W przypadku wszystkich eksperymentów wykorzystano jednakowe współczynniki wielomianu charakterystycznego układu zamkniętego i wynosiły odpowiednio: $k_{osc} = 1$, $\xi = 1$ oraz $\omega_0 = 3$.

Dla eksperymentu, którego wyniki przedstawiono na rys. 3 wykorzystano algorytm MIAC z warunkami początkowymi $\hat{\mathbf{p}}(0) = [3 \quad 100]^T$, $\mathbf{P}(0) = \mathbf{I}_{2 \times 2}$, gdzie $\mathbf{I}_{2 \times 2}$ jest macierzą jednostkową o wymiarach 2×2 . Do identyfikacji zastosowano pozycję kulki pomniejszoną o wartość początkową $y_{id} = y - y(0)$, aby dla położenia początkowego $y(0) = -150$ mm uzyskać wartość 0.

Tab. 1. Wskaźniki jakości dla danych zebranych podczas eksperymentów (w przypadku algorytmu MIAC wskaźniki zostały obliczone jedynie dla drugiego okresu sygnału zadanego, a w wskaźnikach dla MRAC uwzględniono dane z obu okresów)

Tab 1. Quality indexes for data collected during experiments (when MIAC algorithm was used indexes were calculated only for second period of reference signal, for MRAC indexes consider data from both periods)

Algorytm sterowania	I_{IAE}	J	Dodatkowe uwagi
MIAC	310,78	1123,5	$\hat{\mathbf{p}}(0) = [3 \quad 100]^T$, $\mathbf{P}(0) = \mathbf{I}_{2 \times 2}$
MIAC z początkową zmianą położenia	280,45	1212,1	$\hat{\mathbf{p}}(0) = [3 \quad 90]^T$, $\mathbf{P}(0) = \mathbf{I}_{2 \times 2}$
MRAC	440,31	7727,2	$\gamma = 0,00005$
MRAC z normalizacją	381,34	5441,8	$\gamma = 0,85$, $\alpha_m = 100$
MRAC z metodą Lapunowa	508,12	4869,6	$\gamma = [0,00001 \quad 0,00001 \quad 0,00001]^T$



Rys. 3. Przebiegi sygnałów dla sterowania adaptacyjnego z identyfikacją modelu (MIAC), przyjmując warunki początkowe

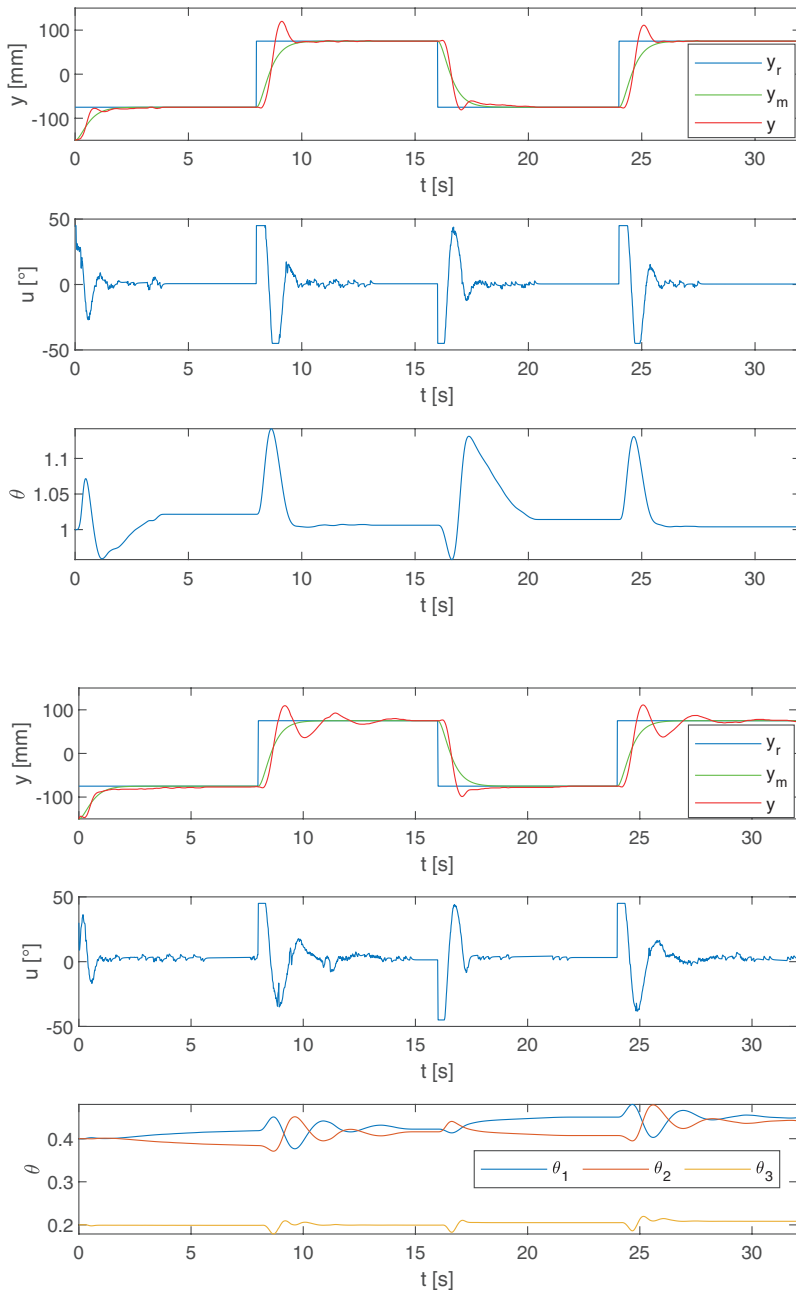
$\hat{p}(0)=[3 \ 100]^T$, $P(0)=I_{2 \times 2}$
 Fig. 3: Signal waveforms for Model Identification Adaptive Control for initial conditions $\hat{p}(0)=[3 \ 100]^T$, $P(0)=I_{2 \times 2}$

Rys. 4. Przebiegi sygnałów dla sterowania adaptacyjnego z identyfikacją modelu (MIAC) z początkową zmianą położenia, przyjmując warunki początkowe

$\hat{p}(0)=[3 \ 90]^T$, $P(0)=I_{2 \times 2}$
 Fig. 4. Signal waveforms for Model Identification Adaptive Control with initial position correction, for initial conditions $\hat{p}(0)=[3 \ 90]^T$, $P(0)=I_{2 \times 2}$

Rys. 5. Przebiegi sygnałów dla sterowania adaptacyjnego z modelem odniesienia (MRAC) dla parametru $\gamma = 0.00005$

Fig. 5. Signal waveforms for Model Reference Adaptive Control for the value of the parameter $\gamma = 0.00005$



Rys. 6. Przebiegi sygnałów dla sterowania adaptacyjnego z modelem odniesienia (MRAC) z normalizacją dla wartości parametrów $\gamma = 0.85$, $\alpha_m = 100$
 Fig. 6. Signal waveforms for Normalized Model Reference Adaptive Control for the values of the parameters $\gamma = 0.85$, $\alpha_m = 100$

Rys. 7. Przebiegi sygnałów dla sterowania adaptacyjnego z zastosowaniem metody Lapunowa dla wartości parametrów $\gamma = [0.00001 \ 0.00001 \ 0.00001]^T$
 Fig. 7. Signal waveforms for Adaptive control the Lyapunov-based model reference for the values of the parameters $\gamma = [0.00001 \ 0.00001 \ 0.00001]^T$

W kolejnym eksperymencie została zaimplementowana modyfikacja regulatora, w której przez pierwsze 10 sekund regulator PID o stałych nastawach doprowadza kulkę do pozycji środkowej. Po 10 sekundach estymowane parametry i macierz kowariancyjna zostają zresetowane do wartości $\hat{\mathbf{p}}(0) = [3 \ 90]^T$ oraz $\mathbf{P}(0) = \mathbf{I}_{2 \times 2}$, a w dalszej części eksperymentu wykonuje się normalnie algorytm MIAC. Początkowe odsunięcie od krawędzi stanowiska zapewniło prawidłową identyfikację parametrów, również w przypadku, gdy w pierwszej fazie ruchu odbywał się w nieodpowiednim kierunku. Wyniki tego eksperymentu przedstawiono na rys. 4.

Przebiegi położenia kulki w obu przypadkach były zbliżone. Nie występowały znaczne przeregulowania, ale występował uchyb ustalony. Całkowite wskaźniki jakości jedynie nieznacznie się różniły. Koszt sterowania J był wyższy, kiedy zastosowano modyfikację, niż w przypadku, kiedy nie nastąpiła początkowa zmiana położenia, natomiast wskaźnik J_{AE} przyjmował mniejszą wartość po zastosowaniu modyfikacji. W chwili zakończenia pierwszego eksperymentu estymowane wzmocnienie obiektu wynosiło $k_1 = 32,67$, a w drugim przypadku $k_2 = 31,03$, więc również tutaj nie występuje znaczna różnica. Estymowane war-

tości zostały wykorzystane jako nastawy początkowe dla sterowania MRAC.

W celu sprawdzenia jakości regulacji dla algorytmów sterowania z modelem odniesienia przygotowano trzy eksperymenty: wykorzystujący regułę MIT z adaptacją wzmocnienia według wzoru (15), znormalizowaną regułę MIT opisaną równaniem (18) oraz z regulatorem PD o dwóch stopniach swobody. Ten ostatni bazował na funkcji Lapunowa, a sygnał sterujący przedstawiono w (19). Ze względu na niezerowe warunki początkowe, w każdym przypadku do mierzonego położenia kulki dodano 150 mm, aby wymusił zerowy warunek początkowy zgodnie z warunkiem dla odpowiedzi modelu odniesienia.

Na rys. 5 przedstawiono przebiegi sygnałów uzyskane podczas eksperymentu z wykorzystaniem klasycznego algorytmu MRAC z parametrem $\gamma = 0,00005$ i wartością początkową wzmocnienia $\theta(0) = 1$. Dla eksperymentu ze sterowaniem adaptacyjnym, wykorzystującym model odniesienia z normalizacją przyjęto wartość początkową wzmocnienia $\theta(0) = 1$ oraz parametry $\gamma = 0,85$ i $\alpha_m = 100$ – rezultaty przedstawiono na rys. 6. W trzecim eksperymencie wykorzystano metodę Lapunowa o parametrach $\gamma = [0,00001 \ 0,00001 \ 0,00001]^T$, a zadane

warunki początkowe to $\theta(0) = [0,4 \quad 0,4 \quad 0,2]^T$, a zmierzone sygnały przedstawiono na rys. 7. Nastawy parametrów γ były dobierane ręcznie, aby zapewnić stabilne działanie układu oraz adaptację wzmocnienia θ przy możliwie szybkim i łagodnym osiągnięciu zadanej pozycji.

Dla każdego eksperymentu ze sterowaniem typu MRAC widoczne są oscylacje w przebiegu położenia. Oscylacje te mają największą amplitudę i najdłuższy czas ustalania w przypadku wykorzystania metody Lapunowa. W rezultacie obliczony wskaźnik jakości I_{IAE} dla tych testów miał największą wartość. Jednak połączenie MRAC z metodą Lapunowa umożliwiło uzyskanie najmniejszego kosztu sterowania J , choć równoczesna adaptacja trzech parametrów jest bardziej wymagająca obliczeniowo. W przypadku eksperymentu z zastosowaniem algorytmu MRAC z normalizacją, wskaźnik I_{IAE} został zredukowany w porównaniu do MRAC z metodą Lapunowa, ale koszt sterowania J był większy. Najwyższy koszt sterowania J uzyskano dla klasycznego algorytmu MRAC, a całkowity wskaźnik I_{IAE} miał wartość między MRAC z normalizacją i MRAC z metodą Lapunowa.

Dużą zaletą metody MRAC jest możliwość wyzerowania uchybu ustalonego dzięki bezpośredniej adaptacji parametrów regulatora na podstawie błędu chwilowego (14). Algorytm z identyfikacją parametrów zapewnia z kolei brak znacznych przeregulowań w odpowiedzi obiektu, znacznie niższy koszt sterowania J oraz możliwość estymacji fizycznych parametrów obiektu.

4. Podsumowanie

Zarówno sterowanie adaptacyjne MIAC, jak i MRAC, pozwoliły na skuteczną regulację położenia kulki na stanowisku BBT bez dokładnej początkowej znajomości parametrów obiektu. Algorytm z identyfikacją parametrów obiektu umożliwia estymację parametrów fizycznych, ale nie kompensuje zakłóceń wewnętrznych, a te w rezultacie powodują powstanie uchybu ustalonego. Wykorzystanie przedstawionej w artykule modyfikacji, polegającej na zmianie położenia początkowego, stanowi zabezpieczenie dla procesu identyfikacji na wypadek początkowego ruchu kulki w nieodpowiednim kierunku. Zastosowanie sterowania z modelem odniesienia pozwala na zniwelowanie uchybu, jednak nie ma dostępu wprost do fizycznych parametrów obiektu. Wykorzystanie zaproponowanej w pracy modyfikacji, polegającej na wymuszeniu zerowych warunków początkowych, pozwala uogólnić rozważania niezależnie od rzeczywistej wartości początkowej. Opisane wersje MRAC nie umożliwiają regulacji w przypadku zerowej wartości sygnału referencyjnego, a na sterowanie algorytmem MIAC nie miałoby to wpływu. Zaimplementowanie algorytmów MRAC z normalizacją oraz z metodą Lapunowa umożliwiło uzyskanie niższego kosztu sterowania niż w przypadku podstawowej wersji algorytmu sterowania adaptacyjnego z modelem referencyjnym. Kluczowe w przypadku wyboru rodzaju sterowania jest rozważenie wymagań stawianych przed projektowanym układem regulacji.

Planowana jest kontynuacja prac nad algorytmami sterowania i utworzenie w przyszłości układu regulacji, w którym jednocześnie wykorzystane będzie sterowanie MRAC i MIAC. Połączenie takie powinno zapewnić dostęp do fizycznych parametrów obiektu, akceptowalny stan przejściowy i zerowy uchyb ustalony. Rozważa się również wykorzystanie dodatkowo estymacji stanu w celu poprawy informacji pomiarowej.

Bibliografia

1. Åström K.J., Hägglund T., *Advanced PID control*. ISA-The Instrumentation, Systems and Automation Society, 2006.
2. Keppler M., Raschel C., Wandinger D., Stemmer A., Ott C., *Robust stabilization of elastic joint robots by ESP and PID control: theory and experiments*. "IEEE Robotics and Automation Letters", Vol. 7, No. 3, 2022, 8283–8290, DOI: 10.1109/LRA.2022.3187277.
3. Zhao J., *Quadrotor's modeling and control system design based on PID control*. "Journal of Physics: Conference Series", Vol. 2483, 2023, DOI: 10.1088/1742-6596/2483/1/012034.
4. Michałek M.M., *Wprowadzenie do identyfikacji systemów*. Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, 2023.
5. Asghari M., Fathollahi-Fard A.M., Mirzapour Al-E-Hashem S., Dulebenets M.A., *Transformation and linearization techniques in optimization: A state-of-the-art survey*, "Mathematics", Vol. 10, No. 2, 2022, DOI: 10.3390/math10020283.
6. Pazderski D., Patelski R., Krysiak B., Kozłowski K., *Analysis of an impact of inertia parameter in active disturbance rejection control structures*, "Electronics", Vol. 9, No. 11, 2020, DOI: 10.3390/electronics9111801.
7. Szott W., Gołębek A., *Symulacyjne modelowanie procesów mieszania się gazów w warunkach złożowych*, "Nafta-Gaz", Vol. 70, No. 3, 2014, 151–161.
8. Zhang D., Wei B., *A review on model reference adaptive control of robotic manipulators*, "Annual Reviews in Control", Vol. 43, 2017, 188–198, DOI: 10.1016/j.arcontrol.2017.02.002.
9. Li Y., Cheng L., Yuan J., Ai J., Dong Y., *Neural Network and Dynamic Inversion Based Adaptive Control for a HALE-UAV against Icing Effects*, "Drones", Vol. 7, No. 4, 2023, DOI: 10.3390/drones7040273.
10. Horla D., *Sterowanie adaptacyjne: ćwiczenia laboratoryjne*. Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, 2019.
11. Åström K.J., *Theory and applications of adaptive control*, "IFAC Proceedings Volumes", Vol. 14, No. 2, 1981, 737–748, DOI: 10.1016/S1474-6670(17)63572-9.
12. Landau I., Lozano R., M'Saad M., Karimi A., *Adaptive Control: Algorithms, Analysis and Applications*. Springer London, 2011, DOI: 10.1007/978-0-85729-664-1.
13. Nguyen N., *Model-Reference Adaptive Control: A Primer*. Springer International Publishing, 2018, DOI: 10.1007/978-3-319-56393-0.
14. Whitaker H., Yamron J., Kezer A., *Design of Model Reference Adaptive Control Systems for Aircraft*. Report Massachusetts Institute of Technology Instrumentation Laboratory R, 1958.
15. Costa R.R., Hsu L., Imai A.K., Kokotovic P., *Lyapunov-based adaptive control of MIMO systems*, "Automatica", Vol. 39, No. 7, 2003, 1251–1257, DOI: 10.1016/S0005-1098(03)00085-2.
16. Kabziński J., Mosiolek P., *Projektowanie nieliniowych układów sterowania*. Wydawnictwo Naukowe PWN, 2018.
17. Bahita M., Belarbi K., *Model reference neural-fuzzy adaptive control of the concentration in a chemical reactor (CSTR)*, "IFAC-PapersOnLine", Vol. 49, No. 29, 2016, 158–162, DOI: 10.1016/j.ifacol.2016.11.093.
18. Wang Y., Li A., Yang S., Li Q., Ma Z., *A neural network based MRAC scheme with application to an autonomous nonlinear rotorcraft in the presence of input saturation*, "ISA Transactions", Vol. 115, 2021, 1–11, DOI: 10.1016/j.isatra.2021.01.003.

19. *The Basics of the Ball Balancing Table*. [<https://acrome.net/post/the-basics-of-the-ball-balancing-table>].
20. Awtar S., Bernard C., Boklund N., Master A., Ueda D., Craig K., *Mechatronic design of a ball-on-plate balancing system*, "Mechatronics", Vol. 12, No. 2, 2002, 217–228, DOI: 10.1016/S0957-4158(01)00062-9.
21. Zhang H., *Design of Control System for Submarine Receiving and Playing Based on Fuzzy Control*. "IOP Conference Series: Materials Science and Engineering", Vol. 569, 2019, DOI: 10.1088/1757-899X/569/3/032017.
22. Zhen Z., Tao G., Yu C., Xue Y., *A multivariable adaptive control scheme for automatic carrier landing of UAV*, "Aerospace Science and Technology", Vol. 92, 2019, 714–721, DOI: 10.1016/j.ast.2019.06.030.
23. Radi S.K., Faraj Y.A., Amsad Y., *Theoretical design of a ball balancing on plate controller*, "Journal of Engineering and Sustainable Development", Vol. 12, No. 4, 2008, 93–114.
24. Mani G., Sivaraman N., Kannan R., *Visual Servoing Based Model Reference Adaptive Control with Lyapunov Rule for a Ball on Plate Balancing System*, [In:] 2018 International Conference on Intelligent and Advanced System (ICIAS), IEEE, DOI: 10.1109/ICIAS.2018.8540635.
25. Zarzycki K., Ławryńczuk M., *Fast real-time model predictive control for a ball-on-plate process*, "Sensors", Vol. 21, No. 12, 2021, DOI: 10.3390/s21123959.
26. Hamdoun M., Abdallah M.B., Ayadi M., Rotella F., Zambettakis I., *Functional observer-based feedback controller for ball balancing table*, "SN Applied Sciences", Vol. 3, 2021, DOI: 10.1007/s42452-021-04590-9.
27. Kurek J., *Aproksymacja modelem inercyjnym I rzędu z opóźnieniem układu inercyjnego n-tego rzędu*, „Pomiary Automatyka Robotyka”, Vol. 14, No. 11, 2010, 49–51.
28. Garnier H., Mensler M., Richard A., *Continuous-time model identification from sampled data: implementation issues and performance evaluation*, "International Journal of Control", Vol. 76, No. 13, 2003, 1337–1357, DOI: 10.1080/0020717031000149636.
29. Åström K.J., Wittenmark B., *Adaptive Control* Second Edition. Dover Books on Electrical Engineering. Dover Publications, 2013.
30. Rothe J., Zevering J., Strohmeier M., Montenegro S., *A modified model reference adaptive controller (M-MRAC) using an updated MIT-rule for the altitude of a UAV*. "Electronics", Vol. 9, No. 7, 2020, DOI: 10.3390/electronics9071104.
31. Radziszewski B., *Stabilność ruchu*, Mechanika Techniczna t. 2. (15–102), Komitet Mechaniki PAN, 2005.
32. Nasar A., Jaffar N.E., Kochummen S.A., *Lyapunov rule based model reference adaptive controller designs for steam turbine speed*, "International Journal of Electrical Engineering and Technology", Vol. 6, No. 7, 2015, 13–22.
33. Spacek L., Bobal V., Vojtesek J., *Digital control of Ball & Plate model using LQ controller*, [In:] 21st International Conference on Process Control (PC), 2017, 36–41, DOI: 10.1109/PC.2017.7976185.

A Comparison of Adaptive Control Methods for the Ball Balancing Table System

Abstract: The purpose of this paper is to present and compare adaptive control algorithms: Model Identification Adaptive Control (MIAC) and Model Reference Adaptive Control (MRAC), with their modifications that allow to improve quality of control in specific cases. The ball balancing (BBT) table physical stand, which is an example of a ball on plate system, was used, and the balancing problem that occurs could potentially lead to work on stabilizing a boat or a drone. This paper presents a non-linear model of the object and its linear approximation in the vicinity of the operating point, additionally demonstrating the process of parameters identification with the Recursive Least Square (RLS) method. The quality of the adaptive control algorithms was compared during transients and in steady state. The research showed the possibilities of both indirect and direct adaptation of the controller parameters, depending on the selected method. Quality indices, such as the cost of control and the integral of absolute error, were utilized for the comparative analysis. The advantages of the compared algorithms and their modifications, that can enhance the system performance in special cases, were also demonstrated. The tested adaptive control algorithms made the system robust to modeling errors (lack of knowledge of parameters) or other internal disturbances.

Keywords: adaptive control, MRAC, MIAC, ball balancing table, RLS

inż. Marcin Mateusz Czajka

czajka.m.marcin@gmail.com
ORCID: 0009-0006-1617-0719

Student drugiego stopnia Automatyki i Robotyki na Politechnice Poznańskiej. Wśród zainteresowań naukowych znajduje się zastosowanie teorii sterowania oraz szeroko pojętego uczenia maszynowego w robotyce, a w szczególności przypadki z wykorzystaniem danych z systemów wizyjnych.



inż. Daria Kubacka

daria.kubacka@student.put.poznan.pl
ORCID: 0009-0002-6891-5584

Studentka drugiego stopnia Automatyki i Robotyki na Politechnice Poznańskiej. Zainteresowania naukowe obejmują zagadnienia związane z wykorzystaniem metod uczenia maszynowego i systemów wizyjnych w robotyce.



mgr inż. Jacek Michalski

jacek.michalski@put.poznan.pl
ORCID: 0000-0002-1666-7331

Asystent badawczo-dydaktyczny na Politechnice Poznańskiej. Zainteresowania naukowe obejmują estymację stanu obiektów (liniowych i nieliniowych), przede wszystkim metodami filtru Kalmana oraz filtru cząsteczkowego. Obszarem zainteresowań są też zaawansowane metody sterowania adaptacyjnego i odpornego z identyfikacją parametrów obiektu lub estymacją stanu – w szczególności sterowanie ADRC.



dr inż. Robert Bączyk

robert.baczuk@put.poznan.pl
ORCID: 0000-0001-9450-8216

Adiunkt w Politechnice Poznańskiej. Zainteresowania naukowe obejmują szeroko pojętą teorię sterowania oraz wizję komputerową. W szczególności obszarem zainteresowań jest niepewność pomiaru w systemach wizyjnych i systemy SLAM wykorzystujące filtr Kalmana i kamerę jako sensor.



mgr inż. Piotr Kozierski

piotr.kozierski@gmail.com
ORCID: 0000-0001-8777-6132

Asystent na Politechnice Poznańskiej. Główne obszary zainteresowań to odporna estymacja stanu obiektów, z naciskiem na metody filtru cząsteczkowego oraz obiekty typu sieciowego.

