

# Komputerowe metody badania stabilności modelu Roessera liniowych układów 2D

Mikołaj Busłowicz\*, Artur Eryk Rzepecki\*\*

\* Politechnika Białostocka, Wydział Elektryczny

\*\* Studium Doktoranckie, Wydział Elektryczny PB

**Streszczenie:** Rozpatrzono problem badania asymptotycznej stabilności liniowych układów dynamicznych dwuwymiarowych (2D). Podano komputerowe metody badania asymptotycznej stabilności modelu Roessera w przypadku ogólnym oraz analityczną metodę w przypadku szczególnym układu skalarnego. Rozważania zilustrowano przykładami liczbowymi.

**Słowa kluczowe:** układ 2D, model Roessera, stabilność

## 1. Wstęp

Do opisu wielu zjawisk i procesów zachodzących w różnych dziedzinach techniki (np. przetwarzanie sygnałów i obrazów, kodowanie i filtracja sygnałów) stosuje się modele dwuwymiarowe (2D). Procesy (układy) opisywane takimi modelami są nazywane procesami (układami) 2D.

Problematyka analizy i syntezy układów 2D jest intensywnie rozwijana w literaturze światowej od około 40 lat. W ostatnich kilkunastu latach rozpatruje się nie tylko klasyczne modele układów 2D, ale także modele dodatnie (w tym modele niecałkowitych rzędów), np. [1, 10-15, 17, 23].

Podobnie jak w przypadku układów 1D, problem badania asymptotycznej stabilności układów 2D jest równoważny z problemem badania rozkładu zer jego funkcji charakterystycznej, która jest wielomianem dwóch niezależnych zmiennych zespolonych.

Do badania asymptotycznej stabilności układów 2D wykorzystuje się między innymi metody analityczne, podobne jak w przypadku badania stabilności w sensie Schurra układów 1D (np. [2]), metody wykorzystujące teorię stabilności Lapunowa (np. [19]), czy też metody bazujące na LMI (np. [4, 5, 12, 20, 23]). Problem badania asymptotycznej stabilności układów 2D był rozpatrywany w wielu publikacjach, np. [1-24].

W niniejszej pracy zostaną podane komputerowe metody badania asymptotycznej stabilności modelu Roessera w przypadku ogólnym oraz metody analityczne w przypadku układu skalarnego. Są one uogólnieniem na model Roessera metod podanych w pracy [3] w przypadku modelu Fornasini-Marchesiniego.

W pracy będziemy stosować następujące oznaczenia:  $\lambda_i(X)$  -  $i$ -ta wartość własna macierzy  $X$ ;  $\mathfrak{R}^{n \times m}$  - zbiór macierzy o wymiarach  $n \times m$ , przy czym  $\mathfrak{R}^n = \mathfrak{R}^{n \times 1}$ ;  $Z_+$  - zbiór liczb całkowitych nieujemnych;  $\mathfrak{R}_+ = [0, \infty)$ .

## 2. Sformułowanie problemu

Weźmy pod uwagę model Roessera liniowego układu 2D, którego równanie stanu ma postać [9, 10, 11]

$$\begin{bmatrix} x^h(i+1, k) \\ x^v(i, k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i, k) \\ x^v(i, k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u(i, k), \quad i, k \in Z_+, \quad (1)$$

przy czym  $x^h(i, k) \in \mathfrak{R}^{n_1}$  i  $x^v(i, k) \in \mathfrak{R}^{n_2}$  są to, odpowiednio, wektor horyzontalny i wertykalny,  $u(i, k) \in \mathfrak{R}^m$  jest wektorem wymuszeń, zaś  $A_{11} \in \mathfrak{R}^{n_1 \times n_1}$ ,  $A_{12} \in \mathfrak{R}^{n_1 \times n_2}$ ,  $A_{21} \in \mathfrak{R}^{n_2 \times n_1}$ ,  $A_{22} \in \mathfrak{R}^{n_2 \times n_2}$ ,  $B_1 \in \mathfrak{R}^{n_1 \times m}$ ,  $B_2 \in \mathfrak{R}^{n_2 \times m}$ .

Warunki brzegowe dla równania (1) mają postać

$$x^h(0, k) = x_{0k}^h \quad \text{dla } k \in Z_+ \quad \text{oraz} \quad x^v(i, 0) = x_{i0}^v \quad \text{dla } i \in Z_+. \quad (2)$$

Macierz charakterystyczna  $H(s, z)$  modelu Roessera (1) ma postać

$$H(z_1, z_2) = \begin{bmatrix} z_1 I_{n_1} - A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & z_2 I_{n_2} - A_{22} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Oblicza się ją ze wzoru

$$H(z_1, z_2) = I(z_1, z_2) - A, \quad (4)$$

gdzie

$$I(z_1, z_2) = \begin{bmatrix} z_1 I_{n_1} & 0 \\ 0 & z_2 I_{n_2} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Funkcję charakterystyczną  $w(s, z)$  modelu Roessera można obliczyć korzystając ze wzoru

$$w(z_1, z_2) = \det H(z_1, z_2). \quad (6)$$

Jest ona wielomianem dwóch zmiennych niezależnych  $z_1$  i  $z_2$ , o postaci

$$w(z_1, z_2) = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n a_{kj} z_1^k z_2^j, \quad a_{nn} = 1. \quad (7)$$

**Definicja 1.** Model Roessera (1) układu 2D będziemy nazywać asymptotycznie stabilnym, jeżeli przy  $u(i, k) \equiv 0$  oraz ograniczonych warunkach brzegowych (2) zachodzą zależności

$$\lim_{i, k \rightarrow \infty} \|x^h(i, k)\| = 0; \quad \lim_{i, k \rightarrow \infty} \|x^v(i, k)\| = 0. \quad (8)$$

Na podstawie pracy [2], w której rozpatrywano problem badania asymptotycznej stabilności układów 2D

o znanym wielomianie charakterystycznym, możemy sformułować poniższe twierdzenie.

**Twierdzenie 1.** Model Roessera (1) układu 2D jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian charakterystyczny (6) spełnia warunek

$$w(z_1, z_2) \neq 0, \quad |z_1| \geq 1, \quad |z_2| \geq 1. \quad (9)$$

Celem pracy jest podanie komputerowych metod badania asymptotycznej stabilności modelu Roessera (1) układu 2D. Proponowane metody bazują na warunkach koniecznych i wystarczających asymptotycznej stabilności, służących do sprawdzania spełnienia warunku (9).

### 3. Rozwiązanie problemu

W pracy [3] wykorzystując rezultaty pracy [2] udowodniono poniższe twierdzenie.

**Twierdzenie 2.** Liniowy układ 2D o wielomianie charakterystycznym  $w(z_1, z_2)$  jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy są spełnione dwa poniższe warunki

- 1)  $w(z_1, 1) \neq 0, \quad |z_1| \geq 1,$
- 2)  $w(e^{j\omega}, z_2) \neq 0, \quad \omega \in [0, 2\pi], \quad |z_2| \geq 1.$

Spełnienie warunku 1) twierdzenia 2 oznacza, że wszystkie zera wielomianu  $w(z_1, 1)$  jednej zmiennej mają wartości bezwzględne mniejsze od 1, czyli ten wielomian jest stabilny w sensie Schura (jest wielomianem Schura). Do badania jego stabilności można stosować znane kryteria stabilności układów dyskretnych 1D.

Spełnienie warunku 2) twierdzenia 2 oznacza, że dla każdego ustalonego  $\omega \in [0, 2\pi]$  wielomian zespolony  $w(e^{j\omega}, z_2)$  nie ma zer o wartościach bezwzględnych większych lub równych jeden, czyli jest on stabilny w sensie Schura. Łatwo zauważyć, że możemy ograniczyć się do przedziału  $[0, \pi]$  wartości parametru  $\omega$ .

**Lemat 1.** Proste warunki konieczne asymptotycznej stabilności modelu (1) mają postaci:

$$|\lambda_{i_1}(A_{11})| < 1, \quad i_1 = 1, 2, \dots, n_1, \quad (10a)$$

$$|\lambda_{i_2}(A_{22})| < 1, \quad i_2 = 1, 2, \dots, n_2. \quad (10b)$$

**Dowód.** Przyjmując w równaniu (1)  $B_1 = B_2 \equiv 0$  oraz  $A_{12} \equiv 0$ , otrzymamy jednorodne równanie stanu układu dyskretnego (dla dowolnego ustalonego  $k \in Z_+$ )

$$x^h(i+1, k) = A_1 x^h(i, k), \quad i \in Z_+. \quad (11)$$

Dyskretny układ (11) jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony warunek (10a). ■

Podobnie, dla  $B_1 = B_2 \equiv 0$  oraz  $A_{21} \equiv 0$  z równania (1) otrzymamy jednorodne równanie stanu układu dyskretnego (dla dowolnego ustalonego  $i \in Z_+$ )

$$x^v(i, k+1) = A_2 x^v(i, k), \quad k \in Z_+. \quad (12)$$

Układ dyskretny (12) jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony warunek (10b). ■

Spełnienie warunków (10) oznacza, że macierze  $A_{11}$  i  $A_{22}$  są stabilne w sensie Schura.

Jeżeli jest spełniony warunek (10a), to macierz  $A_{11}$  jest nieosobliwa.

Wykorzystując wzory na obliczanie wyznacznika macierzy blokowej, ze wzorów (6) i (3) otrzymamy

$$w(z_1, z_2) = \det(z_1 I_{n_1} - A_{11}) \det(z_2 I_{n_2} - S_1(z_1)), \quad (13)$$

gdzie

$$S_1(z_1) = A_{22} + A_{21}(z_1 I_{n_1} - A_{11})^{-1} A_{12}. \quad (14)$$

Podobnie, jeżeli jest spełniony warunek (10b), to macierz  $A_{22}$  jest nieosobliwa i wzór (6) można napisać w postaci

$$w(z_1, z_2) = \det(z_2 I_{n_2} - A_{22}) \det(z_1 I_{n_1} - S_2(z_2)), \quad (15)$$

gdzie

$$S_2(z_2) = A_{11} + A_{12}(z_2 I_{n_2} - A_{22})^{-1} A_{21}. \quad (16)$$

**Lemat 2.** Jeżeli zachodzi (10b), to warunek 1) twierdzenia 2 jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy wartości własne macierzy

$$S_2(1) = A_{11} + A_{12}(I_{n_2} - A_{22})^{-1} A_{21} \quad (17)$$

mają wartości bezwzględne mniejsze od 1.

**Dowód.** Podstawiając  $z_2 = 1$  we wzorze (15), otrzymamy

$$w(z_1, 1) = \det(I_{n_2} - A_{22}) \det(z_1 I_{n_1} - S_2(1)). \quad (18)$$

Jeżeli jest spełniony warunek (10b), to  $A_{22} \neq I_{n_2}$  i macierz (17) jest dobrze określona. Zatem wartości własne macierzy (17) są miejscami zerowymi wielomianu (18) i warunek 1) twierdzenia 2 jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy

$$|\lambda_i(S_2(1))| < 1, \quad i = 1, 2, \dots, n_1, \quad (19)$$

co kończy dowód. ■

**Lemat 3.** Jeżeli zachodzi (10a), to warunek 2) twierdzenia 2 jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy wartości własne macierzy  $S_1(e^{j\omega})$  mają wartości bezwzględne mniejsze od 1 dla każdego  $\omega \in [0, 2\pi]$ , gdzie

$$S_1(e^{j\omega}) = A_{22} + A_{21}(e^{j\omega} I_{n_1} - A_{11})^{-1} A_{12}. \quad (20)$$

**Dowód.** Podstawiając  $z_1 = e^{j\omega}$  we wzorze (13) otrzymamy

$$w(e^{j\omega}, z_2) = \det(e^{j\omega} I_{n_1} - A_{11}) \det(z_2 I_{n_2} - S_1(e^{j\omega})), \quad (21)$$

gdzie  $S_1(e^{j\omega})$  ma postać (20).

Ze wzoru (21) wynika, że jeżeli jest spełniony warunek (10a), to warunek 2) twierdzenia 2 jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy

$$|\lambda_i(S_1(e^{j\omega}))| < 1, \quad \forall \omega \in [0, 2\pi], \quad i = 1, 2, \dots, n_2, \quad (22)$$

co kończy dowód lematu. ■

**Twierdzenie 3.** Model Roessera (1) układu 2D jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy są spełnione warunki (10), (19) i (22), przy czym macierze  $S_2(1)$  i  $S_1(e^{j\omega})$  mają postaci (17) i (20), odpowiednio.

**Dowód.** Dowód wynika bezpośrednio z twierdzenia 2 i lematów 1, 2 i 3. ■

Zauważmy, że w twierdzeniu 3 możemy zamienić rolami zmienne  $z_1$  i  $z_2$ . Otrzymamy wtedy dwa poniższe twierdzenia, równoważne z twierdzeniami 2 i 3, odpowiednio.

**Twierdzenie 4.** Liniowy układ 2D o wielomianie charakterystycznym  $w(z_1, z_2)$  jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy są spełnione dwa poniższe warunki:

- 1)  $w(1, z_2) \neq 0, |z_2| \geq 1,$
- 2)  $w(z_1, e^{j\omega}) \neq 0, \omega \in [0, 2\pi], |z_1| \geq 1.$

Ze wzorów (13) i (15) dla  $z_1 = 1$  otrzymamy odpowiednio

$$w(1, z_2) = \det(I_{n_1} - A_{11}) \det(z_2 I_{n_2} - S_1(1)), \quad (23)$$

$$w(1, z_2) = \det(z_2 I_{n_2} - A_{22}) \det(I_{n_1} - S_2(z_2)), \quad (24)$$

przy czym  $S_2(z_2)$  ma postać (16) zaś

$$S_1(1) = A_{22} + A_{21}(I_{n_1} - A_{11})^{-1} A_{12}. \quad (25)$$

**Twierdzenie 5.** Model Roessera (1) układu 2D jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy są spełnione nierówności (10) oraz warunki

$$|\lambda_i(S_1(1))| < 1, \quad i = 1, 2, \dots, n_2, \quad (26)$$

$$|\lambda_i(S_2(e^{j\omega}))| < 1, \quad \forall \omega \in [0, 2\pi], \quad i = 1, 2, \dots, n_1, \quad (27)$$

gdzie macierz  $S_1(1)$  ma postać (25), zaś

$$S_2(e^{j\omega}) = A_{11} + A_{12}(e^{j\omega} I_{n_2} - A_{22})^{-1} A_{21}. \quad (28)$$

### 3.1. Model układu skalarnego

Równanie stanu modelu Roessera skalarnego układu 2D ma postać

$$\begin{bmatrix} x^h(i+1, k) \\ x^v(i, k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^h(i, k) \\ x^v(i, k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u(i, k), \quad i, k \in Z_+, \quad (29)$$

gdzie  $x^h(i, k) \in \mathfrak{R}, x^v(i, k) \in \mathfrak{R}, u(i, k) \in \mathfrak{R}$  zaś  $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$  oraz  $b_1$  i  $b_2$  są rzeczywistymi współczynnikami.

W przypadku układu skalarnego proste warunki konieczne (10) asymptotycznej stabilności przyjmują postać:

$$|a_{11}| < 1, \quad |a_{22}| < 1. \quad (30)$$

Ze wzorów (25) i (28) odpowiednio otrzymamy

$$S_1(1) = a_{22} + \frac{a_{12}a_{21}}{1 - a_{11}}, \quad (31)$$

$$S_2(e^{j\omega}) = a_{11} + \frac{a_{12}a_{21}}{e^{j\omega} - a_{22}}. \quad (32)$$

Zauważmy, że jeżeli  $|a_{11}| < 1$ , to mianownik wyrażenia (31) jest różny od zera i warunek (26) przyjmuje postać

$$|a_{22} + \frac{a_{12}a_{21}}{1 - a_{11}}| < 1. \quad (33)$$

Ponadto, jeżeli  $|a_{22}| < 1$ , to mianownik wyrażenia (32) jest różny od zera dla każdego  $\omega \in [0, 2\pi]$ .

Podstawiając  $\omega = 0$  i  $\omega = \pi$  w (32), otrzymamy

$$s_0 = S_2(1) = a_{11} + \frac{a_{12}a_{21}}{1 - a_{22}}, \quad (34)$$

$$s_\pi = S_2(e^{j\pi}) = a_{11} - \frac{a_{12}a_{21}}{1 + a_{22}}. \quad (35)$$

Łatwo sprawdzić, że wykres funkcji (32) dla  $\omega \in [0, 2\pi]$  jest na płaszczyźnie zmiennej zespolonej okręgiem o środku w punkcie  $s_c$  leżącym na osi rzeczywistej i o promieniu  $r$ , przy czym

$$s_c = 0.5(s_0 + s_\pi), \quad r = |s_0 - s_c|. \quad (36)$$

Okrąg ten przecina oś rzeczywistą w punktach (34) i (35). Zatem wykres funkcji (32) przy  $\omega \in [0, 2\pi]$  leży na płaszczyźnie zmiennej zespolonej w okręgu jednostkowym wtedy i tylko wtedy, gdy

$$|a_{11} + \frac{a_{12}a_{21}}{1 - a_{22}}| < 1 \quad \text{i} \quad |a_{11} - \frac{a_{12}a_{21}}{1 + a_{22}}| < 1. \quad (37)$$

Z powyższych rozważań i twierdzenia 5 wynika następujące twierdzenie.

**Twierdzenie 6.** Skalarny model Roessera (29) jest asymptotycznie stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy są spełnione warunki konieczne (30) i nierówności

$$|a_{22} - \det A| < 1 - a_{11}, \quad (38a)$$

$$|a_{11} - \det A| < 1 - a_{22}, \quad (38b)$$

$$|a_{11} + \det A| < 1 - a_{22}, \quad (38c)$$

gdzie

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}. \quad (39)$$

**Dowód.** Jeżeli są spełnione proste warunki konieczne (30), to dla modelu (29) nierówności (26) i (27) przyjmują postaci: (33) oraz (37). Można je napisać w postaci (38).

## 4. Przykłady

**Przykład 1.** Stosując twierdzenie 5, należy zbadać asymptotyczną stabilność modelu Roessera (1) układu 2D o macierzach

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 0,5 & -0,5 \\ 2,06 & -0,1 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,1 \end{bmatrix}, \quad (40)$$

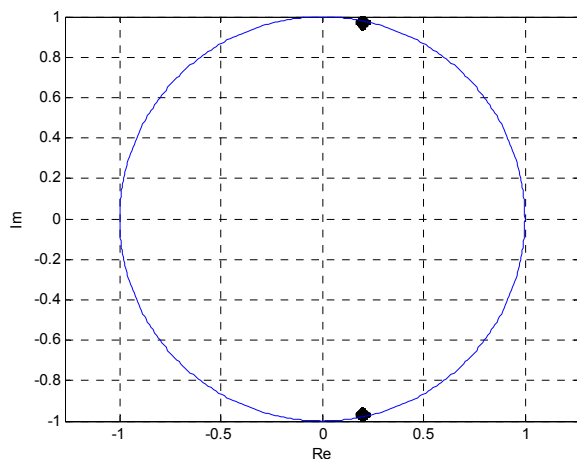
$$A_{21} = [-0,1 \quad -0,2], \quad A_{22} = -0,1.$$

Obliczając wartości własne macierzy  $A_{11}, A_{22}$  i  $S_1(1) = -0,1032$ , otrzymamy odpowiednio:

- wartości własne  $A_{11}$ :  $0,2 \pm j0,9695$
- wartość własna  $A_{22}$ :  $-0,1$
- wartość własna  $S_2(1)$ :  $-0,1032$ .

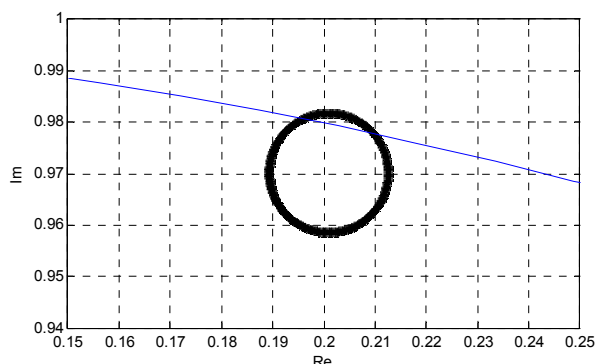
Wszystkie obliczone wartości własne mają wartości bezwzględne mniejsze od 1, zatem proste warunki konieczne (10) oraz warunek (26) są spełnione.

Obliczając z kolei wartości własne macierzy  $S_1(e^{j\omega})$  (28) przy wartościach parametru  $\omega$  zmieniających się od 0 do  $2\pi$  z krokiem  $\Delta\omega = 0,01\pi$  otrzymamy wykresy pokazane na rysunku 1 (wraz z okręgiem jednostkowym). Na rysunku 2 jest pokazany powiększony fragment wykresu z rysunku 1.



**Rys. 1.** Wartości własne macierzy  $S_2(e^{j\omega})$ ,  $\omega \in [0, 2\pi]$

**Fig. 1.** Eigenvalues of the matrix  $S_2(e^{j\omega})$ ,  $\omega \in [0, 2\pi]$



**Rys. 2.** Powiększony fragment rysunku 1

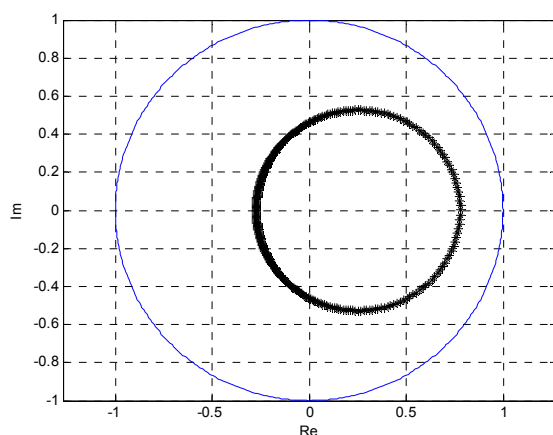
**Fig. 2.** Enlarged fragment of Figure 1

Z rysunków 1 i 2 wynika, że warunek (27) twierdzenia 5 nie jest spełniony, co oznacza, że rozpatrywany model Roessera układu 2D nie jest asymptotycznie stabilny.

**Przykład 2.** Należy zbadać asymptotyczną stabilność modelu skalarnego (29) o następujących wartościach elementów macierzy (39):

$$a_{11} = -0,5; a_{12} = -0,395; a_{21} = 1 \text{ i } a_{22} = -0,01.$$

Łatwo zauważyć, że proste warunki konieczne (30) oraz nierówności (38) są spełnione.



**Rys. 3.** Wartości własne macierzy  $S_1(e^{j\omega})$ ,  $\omega \in [0, 2\pi]$

**Fig. 3.** Eigenvalues of the matrix  $S_1(e^{j\omega})$ ,  $\omega \in [0, 2\pi]$

Z twierdzenia 6 wynika, że rozpatrywany skalarny model Roessera układu 2D jest asymptotycznie stabilny.

Obliczając wartości własne macierzy  $S_1(e^{j\omega})$  (20) przy wartościach parametru  $\omega$  zmieniających się od 0 do  $2\pi$  z krokiem  $\Delta\omega = 0,01\pi$  otrzymamy wykres pokazany na rysunku 3. Potwierdza on rezultat otrzymany w drodze obliczeń analitycznych, że rozpatrywany model jest asymptotycznie stabilny.

## 5. Uwagi końcowe

W pracy rozpatrzono problem badania asymptotycznej stabilności liniowych układów 2D. Podano komputerowe metody badania asymptotycznej stabilności modelu Roessera w przypadku ogólnym (twierdzenia 3 i 5) oraz analityczne warunki asymptotycznej stabilności w przypadku układu skalarnego (twierdzenie 6).

Praca naukowa finansowana ze środków Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego jako projekt badawczy S/WE/2011.

## Bibliografia

- Alfidi M., Hmamed A.: *Control for stability and positivity of 2-D linear discrete-time systems*, „WSEAS Transactions on Systems and Control”, is. 12, vol. 2, 2007, 546-556.
- Bistriz Y.: *On an inviable approach for derivation of 2-D stability tests*, „IEEE Trans. Circuit Syst. II”, vol. 52, no. 11, 2005, 713-718.
- Busłowicz M.: *Komputerowe metody badania stabilności modelu Fornasini-Marchesini liniowych układów 2D*, „Pomiary Automatyka Robotyka”, 2/2011, 556-565.
- Du C., Xie L., *Stability analysis and stabilization of uncertain two-dimensional discrete systems: an LMI approach*, “IEEE Trans. Circuit Syst.”, is. 46, 1999, 1371-1374.
- Hmamed A., Alfidi M., Benzaouia A., Tadeo F.: *LMI conditions for robust stability of 2D linear discrete-time systems*, „Mathematical Problems in Engineering”, vol. 2008, Article ID 356124 (11 pages), doi:10.1155/2008/356124.
- Hu X., Jury E. I.: *On two-dimensional filter stability test*, „IEEE Trans. Circuits Syst.”, vol. 41, no. 7, 1994, 457-462.
- Hu G. D., Liu M.: *Simple criteria for stability of twodimensional linear systems*, „IEEE Trans. Signal Processing”, 53, 2005, 4720-4723.
- Huang T. S.: *Stability of two-dimensional recursive filters*, „IEEE Trans. Audio Electroacoustics”, vol. AU-20, 1972, 158-163.
- Kaczorek T.: *Two-Dimensional Linear Systems*, Springer, Berlin 1985.
- Kaczorek T.: *Dodatnie układy jedno- i dwuwymiarowe*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2000.

11. Kaczorek T.: *Positive 1D and 2D Systems*, Springer, London 2002.
12. Kaczorek T.: *LMI approach to stability of 2D positive systems with delays*, *Multidimensional Systems and Signal Processing*, 20, 2009, 39-54.
13. Kaczorek T.: *Wybrane zagadnienia teorii układów niecałkowitego rzędu*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Białostockiej, Białystok 2009.
14. Kaczorek T.: *Practical stability of positive fractional 2D linear systems*, „*Multidimensional Systems and Signal Processing*”, 21, 2010, 231-238.
15. Kaczorek T.: *Selected Problems of Fractional Systems Theory*, Springer, Berlin 2011.
16. Kar H., Singh V.: *Stability of 2-D systems described by the Fornasini–Marchesini first Model*, „*IEEE Transactions on Signal Processing*”, vol. 51, no. 6, 2003, 1675-1676.
17. Kurek J. E.: *Stability of positive 2-D system described by the Roesser model*, „*IEEE Transactions on Circuits and Systems – I: Fundamental Theory and Applications*”, vol. 49, no. 4, 2002, 531-533.
18. Liu T.: *Stability analysis of linear 2-D systems*, „*Signal Processing*”, 88, 2008, 2078-2084.
19. Lu W.-S.: *On a Lyapunov approach to stability analysis of 2-D digital filters*, „*IEEE Trans. Circuits Syst. I, Fundam. Theory Appl.*”, vol. 45, 1994, 665-669.
20. Ooba T.: *On stability analysis of 2-D systems based on 2-D Lyapunov matrix inequalities*, „*IEEE Trans. Circuit Syst. I, Fundam. Theory Appl.*”, vol. 47, 2000, 1263-1265.
21. Paszke W.: Galkowski K., Rogers E., Kummert A., *Nowe metody badania stabilności klasy liniowych układów dwuwymiarowych*, [w] *Mat. XVII Krajowej Konferencji Automatyki*, Kielce-Cedzyna, 2011, 557-556 (CD-ROM).
22. Rogers E., Owens D. H.: *Stability Analysis for Linear Repetitive Processes*, Springer-Verlag, Berlin 1992.
23. Twardy M.: An LMI approach to checking stability of 2D positive systems, „*Bull. Pol. Acad. Sci., Tech. Sci.*”, vol. 55, no. 4, 2007, 385-395.
24. Xiao X., Unbehauen R., *New stability test algorithm for two-dimensional digital filters*, „*IEEE Trans. Circuits Syst. I, Fundam. Theory Appl.*”, vol. 45, no. 7, 1998, 739-741.
25. Yang S.-F., Hwang C.: *An improved stability test algorithm for two-dimensional digital filters*, „*IEEE Trans. Circuits Syst. I, Fundam. Theory Appl.*”, vol. 47, no. 7, 2000, 1120-1123. ■

### Computer methods for stability investigation of the Roesser model of 2D linear systems

**Abstract:** The problem of asymptotic stability of linear dynamic 2D systems is considered. Computer methods for asymptotic stability analysis of the Roesser model in the general case and analytic method in the case of scalar systems are given. The considerations are illustrated by numerical examples.

**Keywords:** 2D system, Roesser model, stability.

#### prof. dr. hab. inż. Mikołaj Busłowicz

Profesor zwyczajny Politechniki Białostockiej, kierownik Katedry Automatyki i Elektroniki na Wydziale Elektrycznym. Od 2004 roku członek Komitetu Automatyki i Robotyki Polskiej Akademii Nauk. Badania naukowe koncentrują się głównie wokół zagadnień analizy i syntezy układów regulacji z opóźnieniami, układów dodatknych, niecałkowitego rzędu, układów 2D oraz układów ciągło-dyskretnych. Jest autorem 3 monografii i ok. 170 publikacji naukowych.  
e-mail: busmiko@pb.edu.pl



#### mgr inż. Artur Eryk Rzepecki

Tytuł magistra inżyniera w zakresie elektrotechniki o specjalności automatyka przemysłowa uzyskał w 2010 roku na Wydziale Elektrycznym Politechniki Białostockiej. Aktualnie jest słuchaczem II roku Studium Doktoranckiego na tym wydziale.  
e-mail: a.rzepecki@student.pb.edu.pl

